12. Klasse Übungsaufgaben	12
Normalenform und HNF von Ebenen	**07**

1. Bestimmen Sie jeweils eine Normalform der folgenden Ebenen

   (a) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   (b) $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   (c) $E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   (d) Welche besondere Lage liegt jeweils vor?

   (e) Alternativ zum Vektorprodukt ist auch eine Umwandlung von der Parameter- in die parameterfreie Normalform möglich durch Eliminieren der Parameter.
   Beispiel mit der Ebene E aus grund127.pdf:

   $$\begin{array}{rcll} x_1 & = & 1 + \lambda + 2\mu & \mid \cdot (-4) \quad \mid \cdot (-3) \\ x_2 & = & 2 + 4\lambda + 3\mu & \mid \\ \underline{x_3} & \underline{=} & \underline{1 + 3\lambda + 5\mu} & \underline{\qquad\qquad \mid \qquad} \\ -4x_1 + x_2 & = & -2 \quad - 5\mu & \mid \\ \underline{-3x_1 + x_3} & \underline{=} & \underline{-2 \quad - \mu} & \underline{\mid \cdot (-5)} \\ E : 11x_1 + x_2 - 5x_3 & = & 8 & \end{array}$$

   Relativ schnell geht dies bei den Ebenen aus den Teilaufgaben (b) und (c); führen Sie dies aus!

   (f) Lohnend ist die Methode aus Teilaufgabe (e) auch bei der Umwandlung von Geraden im $\mathbb{R}^2$. Bringen Sie auf diese Weise die Gerade $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf die Form $x_2 = mx_1 + t$.

2. Stellen Sie die Lotgerade auf die Ebene $E : 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 24$ durch den Punkt $P(1|1|-1)$ auf. Zeigen Sie, dass P nicht auf E liegt.

3. Schreiben Sie die Ebene $E : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = 0$ in der Form $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und zeigen Sie dann, dass $P(1|-4|6)$ auf E liegt.

4. Gegeben sind die Ebenen $E : 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 14$ und $F : -x_1 + 4x_2 + x_3 = -12$.

   (a) Berechnen Sie jeweils die Hesse-Normalform (HNF)!

   (b) Liegt der Punkt $P(4|2|-6)$ näher an E oder an F?

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $(0|0|x_3)$ auf der x_3-Achse, die Abstand 10 von der Ebene E haben.

   (d) Welchen Gleichung hat eine Kugel um $M(9|7|6)$, die die Ebene E genau berührt? Falls die Kugel k um M den Radius 13 hat, welchen Radius hat dann der Schnittkreis mit der Ebene E?