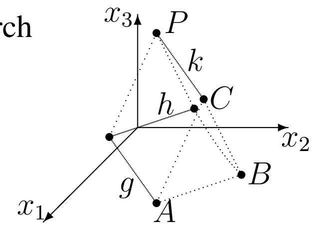
12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Ebenengleichungen — 06

1. Das nebenstehende am Hang stehende Zelt ist gegeben durch $A(8|5|0)$, $B(5|8|0)$, $C(7|7|5)$, $P(2|2|6)$ sowie die Geraden



$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}, \text{ und } k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie Ebenengleichungen in Parameterform auf:

(a) Ebene E_1, die durch die Punkte A, B, C gegeben ist.

(b) Ebene E_2, die durch die Gerade k und den Punkt B festgelegt ist.
Überzeugen Sie sich zuvor davon, dass der Punkt B nicht auf der Geraden k liegt.

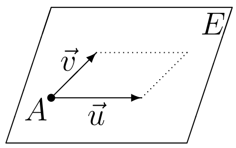
(c) Ebene E_3, die durch die beiden echt parallelen Geraden g und k festgelegt ist.

(d) Ebene E_4, die durch die sich schneidenden Geraden g und h festgelegt ist.

2. Gegeben sind der Punkt $A(2|-3|1)$ und die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Warum ist $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, keine Ebene?

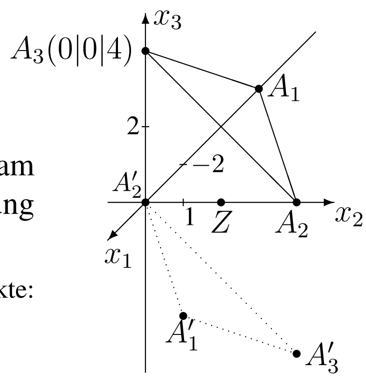
(b) Betrachten Sie nun die Ebene E mit Aufpunkt A und Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$.
Wenn man für die Parameter nur Zahlen aus dem Intervall $[0;1]$ zulässt, also $\lambda, \mu \in [0;1]$, so erreicht man nur Punkte im nebenstehend dargestellten, von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramm.



Zeigen Sie durch Einsetzen in die Parameterform, dass $P(1|-4|3)$ zwar auf der Ebene, aber nicht im eben genannten Parallelogramm liegt.

3. Gegeben sind die Punkte $A(3|0|3)$, $B(6|16|5)$, $C(0|4|5)$ und $D(4|-3|2)$.
Warum kann man mit dem sog. Spatprodukt (→ grund119.pdf) $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD}$ prüfen, ob die Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen?
Was bedeutet dies im Fall der hier gegebenen Punkte für die lineare (Un-?)Abhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$?

4. Gegeben ist die hier dargestellte Ebene E.



(a) Geben Sie eine Gleichung von E an.

(b) Spiegeln Sie die Punkte $A_1(-6|0|0)$, A_2, A_3 am Punkt $Z(0|2|0)$ und stellen Sie damit die Gleichung der gespiegelten Ebene E' auf.

Tipp: Mögliche Vorgehensweise zum Spiegeln der Punkte: $\overrightarrow{ZA_1'} = \overrightarrow{A_1Z}$ mit „Spitze minus Fuß“ nach $\vec{A}_1'$ auflösen.