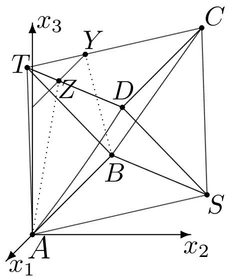
12. Klasse Übungsaufgaben — 12

Lagebeziehung Ebene – Ebene — 10

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen; falls sie parallel sind, bestimmen Sie den Abstand; falls sie sich schneiden, Schnittgerade und Schnittwinkel.
   (a) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9$
   (b) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : -x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 6$
   (c) $E_1 : 14x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ und $E_2 : 3{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1$

2. Geben Sie zur Ebene $E : x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4$ die Gleichung einer Ebene F an, die darauf senkrecht steht und die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, enthält.

3. In der Situation von ueb128.pdf/Aufgabe 4 ist durch die Punkte $A(0|0|0)$, $B(-6|0|0)$, $C(-6|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $D(0|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $S(-3|3\sqrt{3}|0)$ und $T(-3|-\sqrt{3}|2\sqrt{6})$ ein Oktaeder gegeben. Dabei sind alle Kanten gleich lang (z. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{(-6-0)^2 + 0^2 + 0^2} = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{0 + (2\sqrt{3}-0)^2 + (2\sqrt{6}-0)^2} = 6$), und die Querschnittsflächen (z. B. $ABCD$) sind Quadrate (z. B. $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = (-6) \cdot 0 + 0 \cdot 2\sqrt{3} + 0 \cdot 2\sqrt{6} = 0$, also $\sphericalangle BAD = 90°$).



   (a) Die Ebene ASD hat die Gleichung $E_{ASD} : \sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 0$. Zeigen Sie, dass die durch die Punkte B, C und T gegebene Ebene parallel zu E_{ASD} ist.
   (b) Die im Oktaeder liegende Kugel um $M(-3|\sqrt{3}|\sqrt{6})$ mit Radius $\sqrt{6}$ berührt alle Seitenflächen, z. B. die Seitenfläche BCT im Punkt $Q(-5|\frac{1}{3}\sqrt{3}|\frac{4}{3}\sqrt{6})$.
   Der Radius $[MQ]$ steht senkrecht auf der Tangentialebene, d. h. $\overrightarrow{MQ}$ ist Normalvektor der Ebene; man kann nachrechnen, dass $\overrightarrow{MQ}$ ein Vielfaches des Normalvektors der Ebene E_{ASD} ist.
   Stellen Sie nun mit dieser Information die Gleichung der Parallelebene zu E_{ASD} durch den Punkt Q auf, und zeigen Sie, dass der Punkt B darauf liegt.
   (c) Der Mittelpunkt M der Kugel hat von der Ebene ABS und der Ebene ASD den gleichen Abstand, liegt also auf einer winkelhalbierenden Ebene dieser beiden Ebenen. Stellen Sie die Gleichungen dieser winkelhalbierenden Ebenen auf.
   (d) Bei geeigneter Beleuchtung wirft das Dreieck ASD einen Schatten auf die x_1x_2-Grundebene, so dass das projizierte Dreieck ASD' bei D' rechtwinklig ist und D' auf der Geraden $p : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, liegt. Wie kann D' berechnet werden?
   (e) Die x_1x_3-Ebene schneidet die Ebene $E_{TDC} : x_3 = 2\sqrt{6}$ in der Geraden YZ. Berechnen Sie mit dieser Information eine Gleichung der Geraden YZ.
   (f) Das Viereck $ABYZ$ ist ein gleichschenkliges Trapez mit Flächeninhalt $8\sqrt{6}$.
   (Y und Z können als Schnittpunkte der Geraden CT und DT mit der Ebene $x_2 = 0$ berechnet werden. Da die parallelen Geraden YZ und AB beide in der x_1x_3-Ebene verlaufen, AB in Höhe $x_3 = 0$, YZ in Höhe $x_3 = 2\sqrt{6}$, ist der Geradenabstand $d(YZ, AB) = 2\sqrt{6}$ und somit die Fläche $A_{ABYZ} = \frac{\overline{AB} + \overline{YZ}}{2} \cdot d(YZ, AB)$).
   Die x_1x_3-Ebene zerlegt das Oktaeder in zwei Teile. Wie kann berechnet werden, wie viel % die Pyramide $ABYZT$ vom ganzen Oktaeder ausmacht?