Lösungen weitere Themen (alter LP) — W
Quadr. Gleichungen mit Parameter — 06

1.
$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 49 - 4k$.
Ist $D > 0$, also $49 - 4k > 0$, also $k < 12{,}25$, gibt es zwei Lösungen.
Ist $D = 0$, also $k = 12{,}25$, gibt es genau eine doppelte Lösung.
Ist $D < 0$, also $k > 12{,}25$, gibt es keine Lösungen.
Für $k = 11{,}25$ lautet die Gleichung $x^2 - 7x + 11{,}25 = 0$;
$x_{1/2} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 11{,}25} = 3{,}5 \pm 1$;
$x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 4{,}5$.
Für $k = 12{,}25$ lautet sie $x^2 - 7x + 12{,}25 = 0$; $x_{1/2} = 3{,}5 \pm 0 = 3{,}5$.
Für $k = 13{,}25$ gibt es keine Lösungen.

2.
$x^2 + px - x - 1 = 0$; $x^2 + (p-1)x - 1 = 0$.
$D = (p-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = \underbrace{(p-1)^2}_{\geq 0} + 4$.
Da die Diskriminante stets > 0 ist, existieren stets zwei Lösungen.

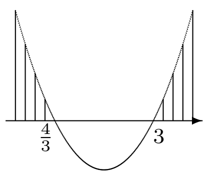
3.
$x^2 + (p-1)x - 1$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel dar. Da der y-Achsenabschnitt bei -1 liegt, existieren stets zwei Nullstellen, also zwei Lösungen der Gleichung $x^2 + (p-1)x - 1 = 0$.
Alternative: $x^2 + px$ stelle eine Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = -p$ dar; $x + 1$ stellt eine Gerade mit dem y-Achsenabschnitt 1 dar. Da dieser höher liegt als der y-Achsenabschnitt der Parabel und da die Parabel nach oben geöffnet ist, ist anschaulich klar (Skizze!), dass es zwei Schnittpunkte geben muss, d. h. zwei Lösungen der Gleichung $x^2 + px = x + 1$.

4.
Die Gleichung $x^2 = 2x + t$, also $x^2 - 2x - t = 0$, muss genau eine Lösung haben (→ ueb95.pdf).
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-t) = 4 + 4t$.
$D = 0$ liefert $t = -1$.

5.
$12x^2 + (12r - 24)x + r = 0$.
$D = (12r - 24)^2 - 4 \cdot 12 \cdot r = 144r^2 - 576r + 576 - 48r = 144r^2 - 624r + 576$.

(a) Genau eine Lösung gibt es, falls $D = 0$, d. h. $r_{1/2} = \frac{624 \pm \sqrt{624^2 - 4 \cdot 144 \cdot 576}}{2 \cdot 144}$; $r_1 = \frac{4}{3}$, $r_2 = 3$.
Falls $r = \frac{4}{3}$, lautet die Gleichung $12x^2 - 8x + \frac{4}{3} = 0$ mit Lösung $x_{1/2} = \frac{1}{3}$.
Falls $r = 3$, lautet die Gleichung $12x^2 + 12x + 3 = 0$ mit Lösung $x_{1/2} = -\frac{1}{2}$.

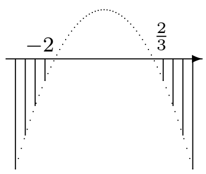
(b) Zwei Lösungen für $D > 0$, d. h. $144r^2 - 624r + 576 > 0$.
Also (Skizze):
$r < \frac{4}{3}$ oder $r > 3$.



(c) Einsetzen von $x = 2$ liefert
$12 \cdot 2^2 - 12r \cdot 2 + r - 24 \cdot 2 = 0$;
$48 + 24r + r - 24 = 0$; $r = 0$.
Damit lautet die Gleichung
$12x^2 - 24x = 0$; $12x(x - 2) = 0$.
Die andere Lösung ist somit $x = 0$.

6.
$ax^2 + (2 - a)x + a = 0$.

(a) $D = (2 - a)^2 + 4 \cdot a \cdot a = 4 - 4a - 3a^2$.
Keine Lösungen für $D < 0$, also $-3a^2 - 4a + 4 < 0$. Löse hierzu die zugehörige quadratische Gleichung:
$a_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-3) \cdot 4}}{2 \cdot (-3)}$;
$a_1 = -2$, $a_2 = \frac{2}{3}$.
Keine Lösungen gibt es somit für $a < -2$ und $a > \frac{2}{3}$.



(b) $x_{1/2} = \frac{-(2-a) \pm \sqrt{4 - 4a - 3a^2}}{2 \cdot a}$.