



Lösungen weitere Themen (alter LP)	W
Eigenschaften von Funktionsgraphen	25

1. (a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow \pm\infty$. (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -\infty$.
 (c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2+\frac{1}{x}}{-2+\frac{1}{x}} \rightarrow \mp\infty$. (d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$.
 (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow -\infty$ (denn z. B. $-3 \cdot 0,1^{-100} = -3 \cdot (\frac{1}{10})^{-100} = -3 \cdot 10^{100}$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,3, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow +\infty$. (g) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow -5$.
 (h) Hier ist zwar $f(1\,000\,000) = (10^6)^2 - 10^{-10} \cdot (10^6)^3 = 10^{12} - 10^{-10+18} = +999\,900\,000\,000$, jedoch ist wegen „ $-x^{34}$ “ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -\infty$.

2. (a) P: $f(-x) = (-x)^{11} - (-x)^5 + 2(-x) = -x^{11} + x^5 - 2x = -(x^{11} - x^5 + 2x) = -f(x)$.
 (b) A: $f(-x) = (-x)^6 - 9(-x)^4 = x^6 - 9x^4 = f(x)$.
 (c) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^4-3x^2}$, also A: $f(-x) = \frac{(-x)^4+1}{(-x)^4-3(-x)^2} = \frac{x^4+1}{x^4-3x^2} = f(x)$.
 (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(x-3)}$ hat Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$; der Funktionsgraph kann also nicht symmetrisch sein, da schon D_f nicht symmetrisch ist.

Sichtbar ist die Nicht-Symmetrie auch an einem Gegenbeispiel, z. B. $f(-2) = \frac{4-1}{-8-3 \cdot 4} = -\frac{3}{20}$, aber $f(2) = \frac{4-1}{8-3 \cdot 4} = -\frac{3}{4}$.

	y-Achsen-Schnitt	Nullstellen $f(x) = 0$
(b)	$y = f(0) = 0$	$x_{1/2/3/4} = 0, x_5 = 3, x_6 = -3$
(c)	kein (da $f(0)$ Nenner \swarrow)	keine (da $x^4 + 1 = 0 \swarrow$)
(d)	kein (da $f(0)$ Nenner \swarrow)	$x_{1/2} = \pm 1$

- (f) sin ist punktsymmetrisch zum Ursprung, cos achsensymmetrisch zur y-Achse.
 (g) P: $f(-x) = (\sin(-x) \cdot \cos(-x))^3 = (-\sin x \cdot \cos x)^3 = -(\sin x \cdot \cos x)^3 = -f(x)$.

3. Nullstelle: $f(x) = 0$ liefert $2x + 4 = 0$, also $x = -2$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$.

$f(3,01)$: Im Zähler etwas mehr als 10, im Nenner 0,01, also sehr großer Funktionswert.
 $f(2,99)$: Im Zähler fast 10, im Nenner $-0,01$, also negativer betragsmäßig sehr großer Funktionswert (Graph nach unten $\rightarrow -\infty$).

Gemäß Skizze ist Punktsymmetrie-Zentrum $Z(3|2)$ zu vermuten.
 Verschobene Funktion:

$$h(x) = f(x+3) - 2 = \frac{2(x+3)+4}{x+3-3} - 2 = \frac{2x+10}{x} - \frac{2x}{x} = \frac{2x+10-2x}{x} = \frac{10}{x}$$

Punktsymmetrie: $h(-x) = \frac{10}{-x} = -\frac{10}{x} = -h(x)$.

