Lösungen weitere Themen — W 17
Potenzen

1. Zum Beispiel $2^3 \cdot 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \;\cdot\; 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 2^{3+5}$, $\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} = 2^{3-5}$,
   $2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^3$, $\frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = (\frac{2}{5})^3$
   $(2^3)^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{15} = 2^{3 \cdot 5}$

2. (a) $-5^{-4} = -\frac{1}{5^4} = -\frac{1}{625}$
   (b) $(-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{+64} = \frac{1}{64}$
   (c) $(5a^2x)^3 \cdot (2x^2)^4 : (ax)^2 = \frac{125a^6x^3 \cdot 16x^8}{a^2x^2} = \frac{2000a^6x^{11}}{a^2x^2} = 2000a^4x^9$
   (d) $(144+25)^{\frac{1}{2}} - (144^{\frac{1}{2}} + 25^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{169} - (\sqrt{144} + \sqrt{25}) = 13 - (12+5) = -4$
   (e) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} = \left[(x^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{4}} = x^{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$
   (f) $(\frac{x}{5})^{-n} : (5x)^n = \frac{1}{(\frac{x}{5})^n} \cdot \frac{1}{(5x)^n} = \frac{5^n}{x^n} \cdot \frac{1}{5^nx^n} = \frac{1}{x^n \cdot x^n} = \frac{1}{x^{2n}} = x^{-2n}$
   (g) $\frac{x^6-x^3}{x^4} = \frac{x^3(x^3-1)}{x^4} = \frac{x^3-1}{x}$
   (h) $\frac{x^6-x^3}{x^4-x} = \frac{x^3(x^3-1)}{x(x^3-1)} = x^2$
   (i) $\frac{(2x+8)^3}{(2x+4)^5} = \frac{[2(x+4)]^3}{[2(x+2)]^5} = \frac{2^3(x+4)^3}{2^5(x+2)^5} = \frac{(x+4)^3}{4(x+2)^5}$
   (j) $\frac{(-k)^3x^{-2}}{x^{-4}x^{-5}} : \frac{k^{-4}x}{4a^2x^{-1}} = \frac{-k^3x^4x^5}{x^2} \cdot \frac{4a^2x^{-1}}{k^{-4}x} = -\frac{k^3x^7 \cdot 4a^2k^4}{x \cdot x} = -4k^7a^2x^5$
   (k) $\frac{(x^3-2x)^{-n-1}}{(x-2)^{-n-1}} = \frac{(x-2)^{n+1}}{(x^3-2x)^{n+1}} = \left(\frac{x-2}{x(x^2-2)}\right)^{n+1}$
   Hier kann nicht gekürzt werden; dies wäre nur möglich beim Nenner $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$.
   (l) $(\sqrt{x} - 3) \cdot 2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^2 = x^{\frac{1}{2}} \cdot 2x - 6x - \frac{1}{2}x^{1{,}5} = 2x^{1{,}5} - 6x - \frac{1}{2}x^{1{,}5} =$
   $= 1{,}5x^{1{,}5} - 6x = 1{,}5\sqrt{x^3} - 6x$
   (m) $7^{6x} + 5^{4x} + 3^{2x}$ kann nicht vereinfacht werden.
   (n) $\frac{a^8x^4 \cdot 2a^4 - 2a^4xa^8 \cdot 4x^3}{(a^8x^4)^2} = \frac{2a^{12}x^4 - 8a^{12}x^4}{a^{16}x^8} = \frac{-6a^{12}x^4}{a^{16}x^8} = -\frac{6}{a^4x^4} = -6a^{-4}x^{-4}$
   (o) $\frac{(x^2-1)^2 \cdot (-2x-6) - (-x^2-6x-1) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)(-2x-6) + (x^2+6x+1) \cdot 4x}{(x^2-1)^3} =$
   $= \frac{-2x^3-6x^2+2x+6+4x^3+24x^2+4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+18x^2+6x+6}{(x^2-1)^3}$
   (p) $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - (x^{\frac{1}{3}}-1) \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2} =$
   $= \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{6}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{-\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{-\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{6}}}{x} + \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = -\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

3. 6 Trilliarden = $6 \cdot 10^{21}$
   Zeit pro Sudoku: $24\text{ h} : (6 \cdot 10^{21}) = \frac{4}{10^{21}} \cdot 3600\text{ s} = \frac{14400}{10^{21}}\text{ s} = \frac{1{,}44 \cdot 10^4}{10^{21}}\text{ s} = 1{,}44 \cdot 10^{-17}\text{ s}$.

4. Mit der Kantenlänge a ist $V = a^3$, also $a = \sqrt[3]{V}$,
   Oberfläche also $O = 6a^2 = 6\left(\sqrt[3]{V}\right)^2 = 6\sqrt[3]{V^2} = 6V^{\frac{2}{3}}$.

5. Temperierte Stimmung: $\sqrt[12]{2^7} : 1 \approx 1{,}4983$, reine Stimmung $3 : 2 = 1{,}5$.
   Relative Abweichung: $\frac{1{,}4981-1{,}5}{1{,}5} \approx -0{,}00113 = -0{,}113$ %, die Frequenz ist bei der temperierten Stimmung um ca. 0,113 % kleiner.