Lösungen weitere Themen (alter LP) — W

Wendepunkte — 11

1.

(a) $f'(x) = 8x^3 - 1$; $f''(x) = 24x^2$

Extrema: $f'(x) = 0$: $x^3 = \frac{1}{8}$; $x = \frac{1}{2}$.
$f''(\frac{1}{2}) = 6 \Rightarrow$ Min

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.
Verwendung der 3. Ableitung hier nicht möglich, also Vorzeichenuntersuchung:

$f'' > 0$ 0 $f'' > 0$

Also Flachpunkt bei $x = 0$.

(b) $f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
$f''(x) = -12x^2 + 12x$

Extrema: $f'(x) = 0$:
$-2x^2(2x - 3) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = \frac{3}{2}$.

$f' > 0$ $f' > 0$ $f' < 0$

steigt 0 steigt $\frac{3}{2}$ fällt

Also Terrassenpunkt bei $x = 0$, Maximum bei $x = \frac{3}{2}$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$:
$-12x(x - 1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

$f'' < 0$ 0 $f'' > 0$ 1 $f'' < 0$

Also Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 1$. Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in $f(x)$: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

Wendetangente im Punkt $(1|1)$:
$m = f'(1) = 2$. Ansatz: $y = 2x + t$.

Punkt einsetzen: $1 = 2 \cdot 1 + t \Rightarrow t$.
Also Wendetangente: $y = 2x - 1$.

(c) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.

Extrema: $f'(x) = 0$: $x = 0$.

$f' < 0$ $f' > 0$

fällt 0 steigt

Also Minimum bei $x = 0$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.

$f'' > 0$ 0 $f'' > 0$

Also Flachpunkt bei $x = 0$.

2.
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$
$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12$
Nullstellen: $f(x) = 0$: $x^2(x^2 - 4x + 6) = 0$;
$x_{1/2} = 0$ (doppelt),
keine weitere Lösung aus $x^2 - 4x + 6 = 0$.
Extrema: $f'(x) = 0$: $4x(x^2 - 3x + 3) = 0$;
$x_1 = 0$ (wie erwartet);
keine weitere Lösung aus $x^2 - 3x + 3 = 0$.
Wegen $f''(0) = 12 > 0$ Minimum bei $x = 0$.
Wendepunkte: $f''(x) = 0$:
$12(x^2 - 2x + 1) = 0$; $(x - 1)^2 = 0$; $x_{1/2} = 1$.
Da stets $f''(x) \geq 0$, liegt kein Krümmungswechsel vor, also Flachpunkt bei $x = 1$.

3.

(a) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 8$
$f''(x) = 12x^2 + 6x + 4$.

$f''(x) = 0$: Keine Lösung der quadratischen Gleichung. Da es sich bei f'' um eine nach oben geöffnete Parabel ohne Nullstellenhandelt, ist stets $f'' > 0$.

f'' stellt die Steigung des Graphen von f' dar, also ist der Graph von f' streng monoton steigend.

(b) $f'(x) = 0$: Das gezielte Raten einer Lösung dieser Gleichung 3. Grades misslingt.

Wegen $f'(-2) = -20$, $f'(-1) = 3$ liegt (wegen der Stetigkeit von f') dazwischen eine Stelle mit $f'(x) = 0$

Durch Probieren mit dem Taschenrechner findet man: $f'(-1{,}242) \approx 0$.

Da der Graph von f' streng monoton steigend ist (siehe (a)), ist $f'(x) < 0$ „links" von dieser Stelle und $f'(x) > 0$ „rechts" davon. Also handelt es sich für die Funktion f um genau einen Wechsel von fallend auf steigend, also um genau ein Minimum.

y-Wert: $f(-1{,}242) \approx -54{,}4$.