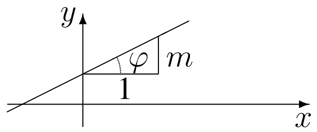
9. Klasse Lösungen — 9
Trigonometrie — 09

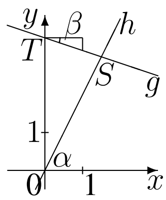
1. (a) $\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$ (Winkelsumme im Dreieck)
   $\sin\beta = \frac{b}{c}$, also $b = c\sin\beta = 4\sin 57^\circ \approx 3{,}35$
   $\cos\beta = \frac{a}{c}$, also $a = c\cos\beta = 4\cos 57^\circ \approx 2{,}18$ (oder Pythagoras: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$)

   (b) $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$
   $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, also $c = \frac{a}{\sin\alpha} \approx 66{,}38$; $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, also $b = \frac{a}{\tan\alpha} \approx 60,64$

   (c) $a^2 + b^2 = c^2$, also $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{0{,}35^2 - 0{,}1^2} \approx 0{,}34$
   $\sin\alpha = \frac{a}{c} \approx 0{,}29$, also $\alpha \approx 16{,}60^\circ$; $\cos\beta = \frac{a}{c} \approx 0{,}29$, also $\beta \approx 73{,}40^\circ$

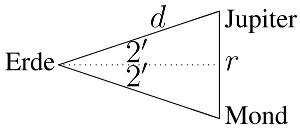
2. (a) 

   Die Gerade $y = mx + t$ mit Steigung m hat als Steigungsdreieck „1 nach rechts, m nach oben". Man liest dort ab: $\tan\varphi = \frac{m}{1} = m$.

   (b) 

   Gerade h: Steigung $m = 2$. Aus $\tan\alpha = 2$ folgt Neigungswinkel $\alpha \approx 63{,}43^\circ$. Somit $\sphericalangle SOT = 90^\circ - \alpha \approx 26{,}57^\circ$.
   Gerade g: Steigungsdreieck (3 nach rechts, 1 nach unten); aus $\tan\beta = \frac{1}{3}$ folgt $\beta \approx 18{,}43^\circ$. Also $\sphericalangle OTS = 90^\circ - \beta \approx 71{,}57^\circ$.
   Winkelsumme im Dreieck: $\sphericalangle TSO \approx 81{,}86^\circ$

3. ΔABC: $\tan\alpha = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}$, also $|\overline{BC}| = |\overline{AB}|\tan\alpha \approx 10{,}38$
   ΔABD: $\tan\beta = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|}$, also $|\overline{AD}| = |\overline{AD}|\tan\beta \approx 8{,}34$
   Pythagoras im ΔDFC: $x = \sqrt{|\overline{DF}|^2 + |\overline{FC}|^2} \approx \sqrt{7^2 + (|\overline{BC}| - |\overline{AD}|)^2} \approx 7{,}29$

4. 

   Halbiert man nebenstehendes gleichschenkliges Dreieck, so erkennt man: $\sin 2' = \frac{r/2}{d}$, somit ergibt sich als Entfernung r von noch getrennt wahrnehmbaren Lichtpunkten:
   $r = 2d\sin 2' = 2 \cdot 800 \cdot 10^6 \cdot \sin(\frac{2}{60})^\circ$ km $\approx 930\,000$ km.
   Somit könnten theoretisch Ganymed und Kallisto noch getrennt gesehen werden.

5. Es ist $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

   (a) $\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$
   $1 + \tan^2 30^\circ = 1 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}$; $1 + \tan^2 45^\circ = 2$

   (b) $1 + \tan^2\alpha = 1 + (\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^2 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
   $1 + \tan^2 30^\circ = \frac{1}{\cos^2 30^\circ} = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \frac{4}{3}$; $1 + \tan^2 45^\circ = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 2$

6. Vorüberlegung: Zur Berechnung von δ muss man das untere Teildreieck betrachten und benötigt hier eine weitere Größe; hierfür bietet sich der Winkel γ an, da dieser auch im ganzen Dreieck vorkommt und dort schon drei Seitenlängen bekannt sind. Von Sinussatz und Kosinussatz kommt hierfür nur der Kosinussatz in Frage, da er derjenige ist, in dem drei Seitenlängen vorkommen.
   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{25+16-9}{2\cdot 5\cdot 4} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma \approx 36{,}9^\circ$
   Unteres Teildreieck: Sinussatz (Kosinussatz wäre möglich, ergäbe aber quadratische Gleichung).
   $\frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{a}{d} \Rightarrow \sin\delta = \frac{\sin\gamma\cdot a}{d} = 0{,}75 \Rightarrow \delta_1 \approx 48{,}6^\circ$ oder $\delta_2 \approx 131{,}4^\circ$
   Im ersteren Fall wäre (Winkelsumme im unteren Teildreieck) $\varepsilon \approx 94{,}5^\circ$ der größte Winkel in diesem Dreieck; da dort a die größte Seite ist, muss jedoch der a gegenüberliegende Winkel δ der größte sein, also ist $\delta \approx 131{,}4^\circ$.