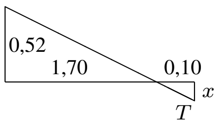
9. Klasse Lösungen	9
Ähnlichkeit, Strahlensatz	**06**

1. (a) $\Delta ADT \sim \Delta ACB$, also $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{TD}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|}$
$\frac{x}{6} = \frac{x+10}{10}$; $\quad 10x = 6x + 60$
$x = 15$
Ebenso $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TD}|}$
$\frac{15+y}{10} = \frac{15}{6}$; $\quad 6(15+y) = 15 \cdot 10$
$90 + 6y = 150$
$y = 10$
Teilverhältnis $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \frac{6}{10-6}$

(b) $\Delta ATC \sim \Delta BTD$, also $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TC}|} = \frac{|\overline{BT}|}{|\overline{TD}|}$
$\frac{x}{6} = \frac{y}{10}$; $\quad 10x = 6y$
Ferner $|\overline{AB}| = x + y = 15$,
also $y = 15 - x$ eingesetzt:
$10x = 6(15 - x)$; $\quad 10x = 90 - 6x$
$x = \frac{90}{16} = \frac{45}{8} = 5{,}625$
$y = 15 - x = 15 - \frac{45}{8} = \frac{75}{8} = 9{,}375$
Teilverhältnis $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = \frac{x}{y} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

2. Die Dreiecke sind ähnlich, da sie in den Winkeln übereinstimmen, denn:
$\sphericalangle(r,t) = 90° - \sphericalangle(t,F_G) = \sphericalangle(F_G,F_N)$, $\sphericalangle(s,r) = 90° = \sphericalangle(F_N,F_H)$.
$\frac{F_H}{F_G} = \frac{\text{kürzere Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{s}{t}$

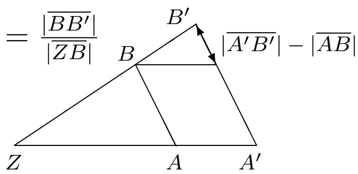
3. 

Nach Einzeichnen einer Hilfslinie auf Höhe der Seitenwand folgt:
$\frac{x}{0{,}10} = \frac{0{,}52}{1{,}70}$, also $x = \frac{0{,}52 \cdot 0{,}10}{1{,}70} \approx 0{,}03$.
Somit befindet sich T etwa $2{,}03 - 0{,}03 = 2{,}00$ m über dem Boden.

4. (a) $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{ZB'}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|}$ (d. h. die Querstrecken verhalten sich wie die von Z aus gemessenen Stücke auf den Schenkeln)

(b) $\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZA'}|-|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} - 1 = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} - 1 = \frac{|\overline{ZB'}|-|\overline{ZB}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{ZB}|}$

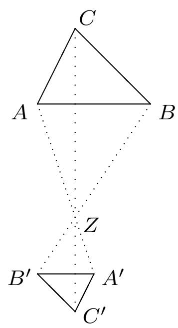
$\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} - 1 = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} - 1 = \frac{|\overline{A'B'}|-|\overline{AB}|}{|\overline{AB}|}$



(c) Betrachte V-Figur von E aus: $\frac{|\overline{DF}|}{|\overline{EF}|} = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{EG}|}$, also $|\overline{DF}| = \frac{|\overline{CG}| \cdot |\overline{EF}|}{|\overline{EG}|} = \frac{14 \cdot 6}{6+9} = 5{,}6$.
Betrachte X-Figur von D aus: $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{EF}|}$, also $|\overline{AD}| = \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{DF}|}{|\overline{EF}|} = \frac{12 \cdot 5{,}6}{6} = 11{,}2$.
Tipp: Das Umstellen der Formel ist bequemer, wenn man beim Aufschreiben der Verhältnisse die gesuchte Streckenlänge in den Zähler schreibt.

5. (a) $m = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{A'C'}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{B'C'}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{ZC'}|}{|\overline{ZC}|}$

(b) Für $m = -\frac{1}{2}$ siehe Bild rechts.
Für $m = -1$ erhält man eine Punktspiegelung an Z.



6. (a) $m = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{3}{5}$.
Für die Höhen gilt der gleiche Streckungsfaktor: $\frac{h'}{h} = \frac{3}{5}$. Ferner $h = h' + H$.
Auflösen der ersten Gleichung nach h' und Einsetzen in die zweite liefert
$h = \frac{3}{5}h + H$, $\frac{2}{5}h = H$, $h = \frac{5}{2}H = 2{,}5$.

(b) $V = \frac{1}{3}Gh$, verkleinerte Pyramide: $V' = \frac{1}{3}G'h'$.
Da Flächen mit dem Faktor m^2 zu multiplizieren sind, folgt
$V' = \frac{1}{3}m^2G \cdot mh = m^3 \cdot \frac{1}{3}Gh = m^3V$