9. Klasse Lösungen — 9
Wurzeln, binomische Formeln — 01

1. (a) $x-36\geq 0$: $x\geq 36$; $D=[36;\infty[$.
   (b) $x+36>0$: $x>-36$; $D=]-36;\infty[$.
   (c) Der Radikand muss ≥ 0 sein: $x^2-12x+36\geq 0$, also $(x-6)^2\geq 0$. Da Quadrate nie negativ sind, ist dies stets der Fall. Also sind alle x-Werte erlaubt: $D=\mathbb{R}$.
2. (a) $\sqrt{5\cdot 100}+3\sqrt{2\cdot 49}-5\sqrt{4\cdot 2}-3\sqrt{9\cdot 5}=10\sqrt{5}+21\sqrt{2}-10\sqrt{2}-9\sqrt{5}=$
   $=\sqrt{5}+11\sqrt{2}$
   (b) $\sqrt{64k^2}=8|k|$
   (c) $\left(\frac{\sqrt{x^5y}}{\sqrt{5a}}:\frac{\sqrt{x^3y^3}}{\sqrt{a^2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{25x}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{x^5y\cdot a^2}\sqrt{25x}}{\sqrt{5a\cdot x^3y^3}\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{x^5ya^2\cdot 25x}{5ax^3y^3a}}=\sqrt{\frac{5x^3}{y^2}}=\frac{x}{y}\sqrt{5x}$
3. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
   (b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{125}}{\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{125})\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{625}}{5}=\frac{\sqrt{10}-25}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}-5$
   (c) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}=\frac{2(3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{2(3+\sqrt{5}}{3^2-\sqrt{5}^2}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
4. Wegen $1{,}41^2=1{,}9881\neq 2$ ist $\sqrt{2}$ nicht genau $1{,}41$.

   Näherung z. B. durch Intervallschachtelung: Wegen $1{,}41^2=1{,}9881$ und $1{,}42^2=2{,}0164$ liegt $\sqrt{2}$ zwischen $1{,}41$ und $1{,}42$. Probieren mit $1{,}415^2=2{,}002225$, $1{,}413^2=1{,}996569$ und $1{,}414^2=1{,}999396$ zeigt, dass $\sqrt{2}$ zwischen $1{,}414$ und $1{,}415$ liegt, also $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$

   Andere Näherungsmöglichkeit für $\sqrt{a}$ mit Heron-Verfahren: Dabei berechnet man ausgehend von einem Startwert schrittweise mit der Formel $x_{\text{neu}}=\frac{1}{2}(x_{\text{alt}}+\frac{a}{x_{\text{alt}}})$ einen besseren Wert, hier ist z. B. mit x_{alt} dann $x_{\text{neu}}=\frac{1}{2}(1{,}41+\frac{2}{1{,}41})\approx 1{,}414\ldots$.
5. (a) i. $(mn-p)(p+mn)=(mn-p)(mn+p)=m^2n^2-p^2$
   ii. $(-r-s)^2=(-r)^2+2(-r)(-s)+(-s)^2=r^2+2rs+s^2$
   (b) i. $11x^2-66x+99=11(x^2-6x+9)=11(x-3)^2$
   ii. $9x^2-121=(3x+11)(3x-11)$
   iii. $81x^4-1=(9x^2+1)(9x^2-1)=(9x^2+1)(3x+1)(3x-1)$
   iv. $3x^2+39x+507=3(x^2+13x+169)$
   (Weitere Vereinfachung ist nicht möglich, da das gemischte Glied nicht zur binomischen Formel $(x+13)^2=x^2+26x+169$ passt.)
   (c) i. $x^2-10x+25=(x-5)^2$
   ii. $\frac{1}{100}x^2+x+25=(\frac{1}{10}x+5)^2$
   (Lösungsweg: 1. Schritt: Schreibe $\frac{1}{100}x^2+x+\ldots=(\frac{1}{10}x+?)^2$.
   2. Schritt: Überlege das gemischte Glied: $2\cdot\frac{1}{10}x\cdot ?=x$, also $\frac{2}{10}\cdot ?=1$, also $?=5$.
   3. Schritt: Binomische Formel für $(\frac{1}{10}x+5)^2$ ausrechnen.)
6. (a) Summen/Differenzen (z. B. $(a+b)^3$) nicht einzeln potenzieren!
   Sondern: Ausmultiplizieren: $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
   (b) Summen/Differenzen (z. B. a^7-a^5) können nicht zusammengefasst werden.
   Sondern: Gemeinsame Faktoren ausklammern, eventuell binomische Formeln suchen, sonst stehen lassen: $\frac{a^7-a^5}{a^3-a^2}=\frac{a^5(a^2-1)}{a^2(a-1)}=\frac{a^5(a+1)(a-1)}{a^2(a-1)}=a^3(a+1)$