12. Klasse Lösungen | 12
Lagebeziehung Gerade – Ebene | 09

1.
Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts $(\lambda|9-4\lambda|-7+\lambda)$ liefert:

(a) $\lambda-(9-4\lambda)-5(-7+\lambda)=26; 26=26$ (wahr); g liegt in E.

(b) $3\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)+8=0$; $\lambda=-3$; g und E schneiden sich im Punkt $S(-3|21|-10)$.
Schnittwinkel ψ: $\sin\psi = \frac{|1\cdot 3+(-4)\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{1+16+1}\cdot\sqrt{9+1+4}} \approx 0{,}063$; $\psi \approx 3{,}61°$.

(c) $2\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)=5; -5=5$; g und E sind echt parallel.
HNF von E: $|\vec{n}|=\sqrt{4+1+4}=3$, also $E: \frac{1}{3}(2x_1+x_2+2x_3-5)=0$; $d(g,E)=|\frac{1}{3}(2\cdot 0+9+2\cdot(-7))|=\frac{5}{3}$.

2.

(a) Die Bedingung $\vec{u}\circ\vec{n}=0$ liefert $2\cdot 4+k\cdot 2+(-5)\cdot(-10)=0$, also $k=-29$.

(b) Richtungsvektor $\vec{u}$ und Normalvektor $\vec{n}$ müssen Vielfache sein. An der ersten/dritten Koordinate sieht man, dass $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{n}$ sein muss, also $k=\frac{1}{2}\cdot 2=1$.

3.

(a) Einsetzen von s in E_1 bzw. E_2:
$-4+4\lambda+2(4-2\lambda)=4; 4=4$ (wahr);
$3(-4+4\lambda)-4(-3+3\lambda)=0; 0=0$ (wahr); also liegt s in E_1 und E_2.

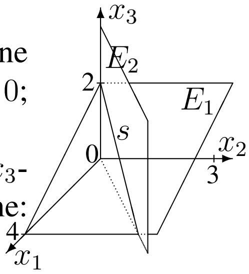
(b) Achsenpunkte A_i von E_1 mit der x_i-Achse: $A_1(4|0|0)$, $A_2(0|?|0)$ existiert nicht, $A_3(0|0|2)$.
Also ist E_1 parallel zur x_2-Achse, so dass auch die Spurgeraden mit der x_1x_2-Ebene und mit der x_2x_3-Ebene in x_2-Richtung zeigen (siehe Skizze):

$$s_{12}: \vec{X}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mu\in\mathbb{R}.$$

$$s_{13}: \vec{X}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}, \sigma\in\mathbb{R}.$$

$$s_{23}: \vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \tau\in\mathbb{R}.$$

(Fortsetzung von 3 (b))
Achsenpunkte B_i von E_2 mit der x_i-Achse: $B_1(0|0|0)$, $B_2(0|0|0)$, $B_3(0|0|?)$: Alle Punkte B_3 liegen in E_2, d. h. E_2 enthält die x_3-Achse, die somit zugleich Spurgerade mit der x_1x_3- und der x_2x_3-Ebene ist:
$$\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, r\in\mathbb{R}.$$
Für die Spurgerade mit der x_1x_2-Ebene benötigt man einen weiteren dort in E_2 liegenden Punkt, z. B. mit $(4|3|0)$: $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$.
Spurpunkte von s:
Mit x_1x_2-Ebene $x_3=0$: $4-2\lambda=0$; $\lambda=2$; $S_{12}(4|3|0)$.
Analog mit x_1x_3- und x_2x_3-Ebene: $S_{13}=S_{23}(0|0|2)$.



4.
Lotgerade $l: \vec{X}=\begin{pmatrix}9\\2\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ in E:
$9+\lambda-3(-5-3\lambda)=4$; $\lambda=-2$; $F(7|2|1)$.
Spiegelpunkt P': $\overrightarrow{FP'}=\overrightarrow{PF}$, also $\vec{P'}-\vec{F}=\vec{F}-\vec{P}$, also $\vec{P'}=2\vec{F}-\vec{P}$, also $P'(5|2|7)$.

5.
Bild analog ueb129.pdf. Ansatz für Ebene durch P senkrecht zu s mit Normalvektor = Ri.vektor der Geraden: $4x_1+3x_2-2x_3=d$.
P einsetzen: $4\cdot 0+3\cdot 0-2\cdot(-27)=d$, $d=54$, also Ebene: $E: 4x_1+3x_2-2x_3=54$.
s in E: $4(-4+4\lambda)+3(-3+3\lambda)-2(4-2\lambda)=54$; $\lambda=3$ in s einsetzen: $F(8|6|-2)$.
Abstand $d(P,g)=\overline{PF}=\sqrt{(8-0)^2+(6-0)^2+(-2+27)^2}=5\sqrt{29}$

6.
Allgemeinen Geradenpunkt in Kugelgleichung einsetzen: $(-4+4\lambda)^2+(-3+3\lambda)^2+(4-2\lambda+27)^2=729$ liefert quadratische Gleichung mit zwei Lösungen für λ.