12. Klasse Lösungen — 12
Lagebeziehung Gerade – Gerade — 08

1.
Parallele Ri.vektoren $\vec{u}_h = (-2)\vec{u}_g$.
Aufpunkt von h $(1|4|3)$ liegt nicht auf g (denn $1 = 2 + \lambda$, $4 = 6 + 2\lambda$, $3 = -1 - \lambda$ ergibt aus erster Gleichung $\lambda = -1$ im Widerspruch zur dritten Gleichung).
Also sind g und h echt parallel.

2.
(a) g und h haben gleichen Aufpunkt A, die Ri.vektoren zeigen aber in verschiedene Richtung (nicht Vielfache). Also schneiden sich g, h in $A(3|0|1)$.

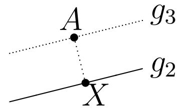
(b) g und k haben gleiche Ri.vektoren. Aufpunkt von k $(7|7|5)$ liegt nicht auf g (denn $7 = 3 - 5\lambda$, $7 = 0 - 5\lambda$, $5 = 1 + \lambda$ führt bereits in den ersten beiden Gleichungen zum Widerspruch). Also sind g und k echt parallel.

3.
(a) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt
$-1+\lambda=1$, $-1=2+\mu$, $1-3\lambda=4+3\mu$.
Also $\lambda = 2$, $\mu = -3$, Probe in dritte Gleichung stimmt.
Also schneiden sich g_1 und g_2.
Schnittpunkt $S(1|-1|-5)$.
Schnittwinkel φ aus $\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|} = \frac{|1\cdot 0+0\cdot 1+(-3)\cdot 3|}{\sqrt{1+0+9}\cdot\sqrt{0+1+9}} = 0{,}9$, also $\varphi \approx 25{,}84°$.

(b) Ri.vektoren $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ parallel ($\vec{u}_3 = 2\vec{u}_2$). Aufpunkt von g_3 $(2|4|8)$ eingesetzt in g_2 ergibt bereits in der ersten Zeile $2 = 1 + 0\mu$ einen Widerspruch, also sind g_2 und g_3 echt parallel.

Abstand des g_3-Aufpunkts $A(2|4|8)$ von der Geraden g_2:
Fußpunkt X als allg. g_2-Geradenpunkt ansetzen: $X(1|2+\mu|4+3\mu)$. Bedingung: $\overrightarrow{AX} \perp g_2$, also $\overrightarrow{AX} \circ \vec{u}_2 = 0$;

$$\begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+\mu-4 \\ 4+3\mu-8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0;$$



$(-1)\cdot 0+(-2+\mu)\cdot 1+(-4+3\mu)\cdot 3 = 0$;
$10\mu = 14$; $\mu = 1{,}4$; also $X(1|3{,}4|8{,}2)$.

(Fortsetzung von Aufgabe 3(b))
Gesuchter Abstand $d(g_2, g_3) = |\overrightarrow{AX}|$
$= \sqrt{(1-2)^2+(3{,}4-4)^2+(8{,}2-8)^2}$
$= \sqrt{1{,}4} \approx 1{,}18$.

(c) Ri.vektoren $\vec{u}_3 \| \vec{u}_4$ ($\vec{u}_4 = -1{,}5\vec{u}_3$). Aufpunkt von g_4 $(2|-4|-16)$ eingesetzt in g_3 ergibt $2 = 2$, $-4 = 4 + 2\sigma$, $-16 = 8 + 6\sigma$; aus zweiter Gleichung also $\sigma = -4$, Probe in erster Gleichung stimmt sowieso, in dritter Gleichung $-16 = 8+6\cdot(-4)$ stimmt ebenfalls, also sind g_3 und g_4 identisch.

(d) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_4$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt $-1 + \lambda = 2$, $-1 = -4 - 3\tau$, $1 - 3\lambda = -16 - 9\tau$. Aus erster und zweiter Gleichung folgen $\lambda = 3$ und $\tau = -1$; Probe in dritter Gleichung $-8 \neq -7$; g_1 und g_4 sind also windschief.

4.
(a) Aufpunkt von g ist D, Richtungsvektor von g ist $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -3-(-6) \\ 3\sqrt{3}-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$, also $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Analog $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Gleichsetzen liefert $3\lambda = -6 - 3\mu$, $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\lambda = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\mu$, $2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$. Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sqrt{3}$ und Addition der zweiten Gleichung liefert $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\lambda = -4\sqrt{3}$, also $\lambda = -1$, $\mu = -1$ und somit Schnittpunkt $T(-3|-\sqrt{3}|2\sqrt{6})$.

(b) x_3-Achse: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ri.vektoren nicht parallel. Gleichsetzen: $-4 + 2\sigma = 0$, $0 = 0$, $2\sqrt{6} = \tau$. Also $\sigma = 2$, $\tau = 2\sqrt{6}$, Probe in zweiter Gleichung stimmt. Somit schneiden sich YZ und die x_3-Achse.