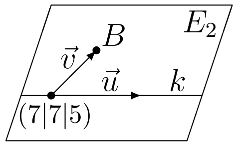
12. Klasse Lösungen — 12
Ebenengleichungen — 06

1. (a) $E_1 : \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) + \mu(\vec{C} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Möglich sind auch Lösungen z. B. mit $\vec{X} = \vec{B} + \lambda(\vec{A} - \vec{B}) + \mu(\vec{C} - \vec{B})$).

   (b) B in k: $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $5 = 7 - 5\sigma$, also $\sigma = 0{,}4$, Probe in zweite Gleichung $8 = 7 - 5\sigma$ Widerspruch, also B nicht auf k.



$$E_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

   (c) $E_3 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

   (d) $E_4 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

2. (a) Da der erste Richtungsvektor das 4-fache des zweiten Richtungsvektors ist, zeigen diese beiden in die gleiche Richtung, sind also linear abhängig, so dass keine Ebenengleichung entsteht.

   (b) P in E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Erste und dritte Zeile liefern $1 = 2 + 4\lambda + \mu$ und $3 = 1 + \lambda$, also $\lambda = 2$ und $\mu = -9$. Probe in zweite Zeile $-4 = -3 + 4\lambda + \mu$ stimmt. Also liegt P auf E, wegen $\lambda \notin [0; 1]$ aber nicht im Parallelogramm.

3. $\frac{1}{6}$ des Spatprodukts gibt das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C, D an. Ist das Volumen 0, so liegen A, B, C, D in einer Ebene. Spatprodukt hier:
$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 60 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 24 + 36 - 60 = 0.$$
Also liegen die Vektoren in einer Ebene und sind somit linear abhängig.

4. (a) Mit den Punkten A_1, $A_2(0|4|0)$, A_3 stellt man die Gleichung der Ebene auf:
$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

   (b) $\overrightarrow{ZA_i'} = \overrightarrow{A_iZ}$, also $\vec{A}_i' - \vec{Z} = \vec{Z} - \vec{A}_i$, also $\vec{A}_i' = 2\vec{Z} - \vec{A}_i$ liefert $A_1'(6|4|0)$, $A_2'(0|0|0)$, $A_3'(0|4|-4)$.
Mit diesen Punkten stellt man die Gleichung von E' auf:
$$E' : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$