



12. Klasse Lösungen	12
Wendepunkte, Integralfunktionen	02

1.

$$I(x) = [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^x = \sin x - \sin \frac{\pi}{2} = \sin x - 1$$

$$I(0) = \sin 0 - 1 = -1 < 0$$

Die Fläche liegt zwar oberhalb der x -Achse, aber „rückwärts“ integrieren (von $\frac{\pi}{2}$ bis 0) ändert das Vorzeichen.

2.

(a) $f'(x) = 8x^3 - 1; f''(x) = 24x^2$

Extrema: $f'(x) = 0: x^3 = \frac{1}{8}; x = \frac{1}{2}$.

$f''(\frac{1}{2}) = 6 \Rightarrow$ **Min**

Wendepunkte: $f''(x) = 0: x = 0$.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ f'' > 0 \quad 0 \quad f'' > 0 \end{array}$$

Also Flachpunkt bei $x = 0$.

(b) $f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

$f''(x) = -12x^2 + 12x$

Extrema: $f'(x) = 0:$

$-2x^2(2x - 3) = 0; x_{1/2} = 0; x_3 = \frac{3}{2}$.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ f' > 0 \quad f' > 0 \quad f' < 0 \\ \text{steigt} \quad 0 \quad \text{steigt} \quad \frac{3}{2} \quad \text{fällt} \end{array}$$

Also Terrassenpunkt bei $x = 0$, Maximum bei $x = \frac{3}{2}$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0:$

$-12x(x - 1) = 0; x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ f'' < 0 \quad 0 \quad f'' > 0 \quad 1 \quad f'' < 0 \end{array}$$

Also Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 1$. Die y -Werte erhält man durch Einsetzen in $f(x): f(0) = 0, f(1) = 1$

Wendetangente im Punkt (1|1):

$m = f'(1) = 2$. Ansatz: $y = 2x + t$.

Punkt einsetzen: $1 = 2 \cdot 1 + t \Rightarrow t$.

Also Wendetangente: $y = 2x - 1$.

(c) $f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$.

Extrema: $f'(x) = 0: x = 0$.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ f' < 0 \quad f' > 0 \\ \text{fällt} \quad 0 \quad \text{steigt} \end{array} \quad \text{Also Min}(0|0)$$

Wendepunkte: $f''(x) = 0: x = 0$.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ f'' > 0 \quad 0 \quad f'' > 0 \end{array} \quad \text{Also Flachpunkt } (0|0)$$

3.

$f'(x) = -x^{-2} - 2x, f''(x) = 2x^{-3} - 2 = \frac{2}{x^3} - 2$

$f''(x) = 0: x^3 = 1; x = 1$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ f'' < 0 \quad f'' > 0 \quad f'' > 0 \\ \text{re.-} \quad 0 \quad \text{li.-} \quad 1 \quad \text{rechtsgekrümmt} \\ \notin D \quad \text{WP } (1|0) \end{array}$$

4.

$f'_k(x) = \frac{x^2 \cdot k - (kx - 2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{kx - 2(kx - 2)}{x^3} = \frac{4 - kx}{x^3}$

$f''_k(x) = \frac{x^3 \cdot (-k) - (4 - kx) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2kx - 12}{x^4}$.

$f''_k(x) = 0: 2kx - 12 = 0; x = \frac{6}{k}$

Falls $k = 0$: Kein Wendepunkt.

Falls $k > 0$: $\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ \text{re.-} \quad 0 \notin D \quad \text{re.-} \quad \frac{6}{k} \quad \text{linksgekr.} \end{array}$

Falls $k < 0$: $\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ \text{li.-} \quad \frac{6}{k} \quad \text{re.-} \quad 0 \notin D \quad \text{rechtsgekr.} \end{array}$

WP $(\frac{6}{k} | \frac{k^2}{9})$, für $k = 3$ also (2|1), stimmt.

5.

Ansatz wegen Achsensymmetrie mit geraden Funktionen: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c;$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx; f''(x) = 12ax^2 + 2b$

WP bei $x = 1: f''(1) = 0: 12a + 2b = 0$ A

Nullstelle bei $x = 1: f(1) = 0: a + b + c = 0$ B

Steigung bei $x = 1: f'(1) = 2: 4a + 2b = 2$ C

Aus A und C folgt $8a = -2$, also $a = -\frac{1}{4}$.

Mit A folgt $b = \frac{3}{2}$, mit B dann $c = -\frac{5}{4}$.

Also: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$.

Mittels Vorzeichenbetrachtung von f'' bestätigt man, dass bei $x = 1$ tatsächlich ein WP vorliegt (und nicht nur ein Flachpunkt).

6.

Falls $I(x) = x \cdot (\ln(x+3) - \ln(2x)) + 3 \ln(x+3) - 7 \ln 2$ Integralfunktion, so muss deren Ableitung den Integranden ergeben:

$$I'(x) = 1 \cdot \ln \frac{x+3}{2x} + x \cdot (\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x} \cdot 2) + 3 \cdot \frac{1}{x+3} = \ln \frac{x+3}{2x} + x \cdot \frac{x-(x+3)}{(x+3) \cdot x} + \frac{3}{x+3} = f(x).$$

Mit Hilfe dieser Stammfunktion kann nun integriert werden:

$$\int_1^x \ln \frac{x+3}{2x} dx = [I(t)]_1^x = I(x) - I(1) =$$

$$I(x) - (1 \cdot \ln \frac{1+3}{2 \cdot 1} + 3 \ln(1+3) - 7 \ln 2) =$$

$$I(x) - (\ln 2 + 3 \ln 4 - 7 \ln 2) = I(x), \text{ denn}$$

$$\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2.$$

Aus $f(3) = I'(3) = 0$ folgt, dass I bei $x = 3$ eine waagrechte Tangente hat.