11. Klasse Lösungen — 11
ln-Funktion — 08

1.

(a) D: $4x + 10 > 0$; $x > -2{,}5$;
$D =]-2{,}5; \infty[$.
$f_1'(x) = \frac{1}{4x+10} \cdot 4 = \frac{2}{2x+5}$

(b) D: $-x > 0$; $x < 0$; $D =]-\infty; 0[$.
$f_2'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

(c) D: $x^2 > 0$; $x \neq 0$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$f_3'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6}{x}$
(oder mit $f_3(x) = 3 \cdot 2 \ln(x)$)

(d) D: $x > 0$, $D = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$.
$f_4'(x) = (x - e) \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x$

(e) D: $v(x) = \frac{2x+5}{x-1} > 0$.
Vorzeichenbereiche (vgl. grund107.pdf):

$v > 0$		$v < 0$		$v > 0$
	$-2{,}5$		1	

Also $D =]-\infty; -2{,}5[\cup]1; \infty[$.

$f_5(x) = \ln(2x + 5) - \ln(x - 1)$
$f_5'(x) = \frac{1}{2x+5} \cdot 2 - \frac{1}{x-1}$

(f) D: $7 - x > 0$; $x < 7$; $D =]-\infty; 7[$.
$f_6'(x) = e^x \cdot \frac{1}{7-x} \cdot (-1) + e^x \cdot \ln(7 - x)$

((d) und (f) Ableitung mit Produktregel)

2.
Produktregel:
$F'(x) = x\frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x - 1 = \ln x = f(x)$
$h(x) = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$, also
Stammfunktion $H(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot (x \ln x - x) + C$
und Ableitung $h'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}$.

3.

(a) $F(x) = 2x - 7 \ln x + C$

(b) $g(x) = \frac{x-11}{x^2} = \frac{1}{x} - 11x^{-2}$, also
$G(x) = \ln x + 11x^{-1}$

4.

(a) $\ln x = -2$; $x = e^{-2}$

(b) $\ln(x^2 - 1) = 10$; $x^2 - 1 = e^{10}$;
$x_{1/2} = \pm\sqrt{e^{10} + 1}$

(c) $0{,}9 < 1 - 0{,}99^x$; $0{,}99^x < 0{,}1$;
$\ln 0{,}99^x < \ln 0{,}1$; $x \ln 0{,}99 < \ln 0{,}1$;
$x > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}99}$; $x > 229{,}1\ldots$

5.
$f(x) = \ln(\frac{x}{x-1}) = \ln x - \ln(x - 1)$,
$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} =$
$= \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)} < 0$ für alle $x \in D_f =]1; \infty[$, also ist f in diesem Bereich streng monoton fallend und daher umkehrbar.
$y = \ln(\frac{x}{x-1})$;
$x \leftrightarrow y$:
$x = \ln(\frac{y}{y-1})$;
$e^x = \frac{y}{y-1}$;
$(y - 1)e^x = y$;
$ye^x - e^x - y = 0$;
$y(e^x - 1) = e^x$;
$y = \frac{e^x}{e^x-1}$; $f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$.

6.
$D_f = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$.
Nullstellen: $f(x) = (x + 2) \ln x = 0$;
$(x + 2) = 0$ oder $\ln x = 0$;
$x = -2$ oder $x = 1$; da -2 nicht im Definitionsbereich liegt, bleibt nur Nullstelle $x = 1$.
$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) \to -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \to \infty$.

Produktregel: $f'(x) = (x + 2) \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x$.
Tangente im Punkt $P(2; 4 \ln 2)$:
$m = f'(2) = 2 + \ln 2$.
Also Ansatz $y = (2 + \ln 2)x + t$.
P: $4 \ln 2 = (2+\ln 2) \cdot 2 + t$, also $t = 2 \ln 2 - 4$.
Somit Tangente: $y = (2 + \ln 2)x + 2 \ln 2 - 4$.

Aufgrund der Limites gehört zu f der Graph C. Sowohl A als auch die um 3 Einheiten nach oben verschobene Funktion B sind Stammfunktionen, da deren Steigungsverhalten durch das Vorzeichen von f richtig beschrieben wird.

F ist Stammfunktion, denn (Produktregel):
$F'(x) =$
$= (0{,}5x^2 + 2x)\frac{1}{x} + (x + 2) \ln x - 0{,}5x - 2 =$
$= (0{,}5x + 2) + (x + 2) \ln x - 0{,}5x - 2 =$
$= (x + 2) \ln x = f(x)$.
$\lim\limits_{x \to 0+0} F(x) = 0$ (denn das Polynom $0{,}5x^2 + 2x$ konvergiert stärker als die ln-Funktion).