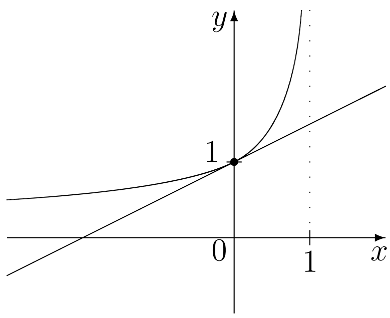
11. Klasse Lösungen — 11
Differentiationsregeln — 06

1. (a) $f'(x) = -x^2 \sin x + 2x \cos x$ (b) $f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot 2x - x^2 \cdot 2}{(2x+2)^2} = \frac{2x^2+4x}{(2x+2)^2}$
   (c) $f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ (d) $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$
   (e) $f(x) = \sin(\frac{1}{2\pi}x)$, also $f'(x) = \cos(\frac{1}{2\pi}x) \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cos(\frac{x}{2\pi})$
   (f) $f(x) = 4 \cdot (3x-2)^{-1}$, also $f'(x) = 4 \cdot (-1) \cdot (3x-2)^{-2} \cdot 3 = -\frac{12}{(3x-2)^2}$
   (g) $f'(x) = (7x-1)^4 \cdot (-2)x^{-3} + 4(7x-1)^3 \cdot 7 \cdot x^{-2} = \frac{(7x-1)^3(14x+2)}{x^3}$
   (h) $f'(x) = \frac{(2x-1)\cdot 2 - (2x+1)\cdot 2}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2}$
   (i) $f'(x) = \frac{(2x-1)^2 \cdot 2 - (2x+1)\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4} = \frac{2(2x-1) - 4(2x+1)}{(2x-1)^3} = \frac{-4x-6}{(2x-1)^3}$

2. $f(x) = (1-4x^2)^{1/2}$; $f'(x) = \frac{1}{2}(1-4x^2)^{-1/2} \cdot (-8x) = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$
   Für die Wurzel muss $1 - 4x^2 \geq 0$ gelten, also $x^2 \leq \frac{1}{4}$, also $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.
   Da bei f' dieser Ausdruck im Nenner steht, ist dort sogar $1 - 4x^2 > 0$ zu verlangen.
   Somit: $D_f = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$; $D_{f'} =]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

3. $f(x) = (1-x)^{-1/2}$; $f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$.
   $f'(0) = \frac{1}{2}$, die Tangente hat also die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 1$.



   Näherung:
   Für „kleine“ x (nahe 0) gilt $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{2}x + 1$
   Anwendung auf $E = mc^2 = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$:
   Für kleine v/c, d. h. für Geschwindigkeiten v, die klein sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c, gilt: $E \approx m_0 c^2 (\frac{1}{2}(v/c)^2 + 1) = \frac{1}{2} m_0 v^2 + m_0 c^2$
   (Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der Ruheenergie $m_0 c^2$ und der kinetischen Energie)

4. Die Steigung von f ist gegeben durch $f'(x) = 0{,}2 - \sin(2x) \cdot 2$; f' ist am größten, wenn sin am kleinsten ist, also wenn $\sin(2x) = -1$, d. h. $2x = \frac{3\pi}{2}$, d. h. $x = \frac{3\pi}{4}$.

5. Verschiedene Schreibweisen für den Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{x} - x^2 = \frac{1-x^3}{x} = x^{-1} - x^2$.
   $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $\lim\limits_{x \to \pm 0} f(x) = “\frac{\pm 1}{\pm 0}” \to \pm\infty$ (Senkrechte Asymptote, Pol 1. Ordnung $x = 0$)
   Nullstelle: $f(x) = 0$: $1 - x^3 = 0$; $x = 1$
   Extremum und Monotonie: $f'(x) = -x^{-2} - 2x = \frac{-1-2x^3}{x^2}$
   $f'(x) = 0$: $-1 - 2x^3 = 0$; $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$
steigt	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	fällt	0	fällt
	Max		$\notin D$	
	$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \mid -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2})$			

   Für $x \to \pm\infty$ ist $\frac{1}{x} \to 0$, also schmiegt sich der Graph von $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ an die Parabel $y = -x^2$ an (also auch $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \to -\infty$).