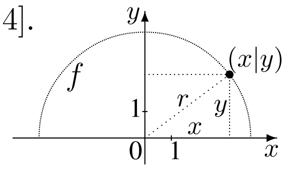
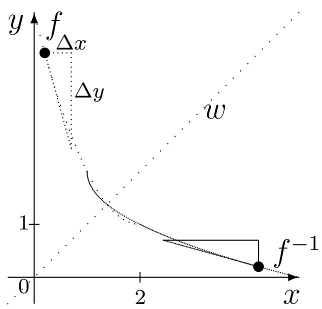
11. Klasse Lösungen — 11
Wurzelfunktion, Umkehrung, Parameter — 05

1. Definitionsbereich: $16 - x^2 \geq 0$, also $x^2 \leq 16$, also $D_f = [-4; 4]$.
   Abstand des Punktes $(x|y) = (x|f(x)) = (x|\sqrt{16-x^2})$ vom Nullpunkt gemäß Pythagoras:
   $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{16-x^2})^2} = \sqrt{x^2+16-x^2} = 4.$



2. (a) Wegen „–" wird die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ an der x-Achse gespiegelt, wegen „$x-1$" um 1 nach rechts verschoben und wegen „+2" um 2 in y-Richtung verschoben.
   (b) Spiegeln an w: Aus z. B. (0,2|4,24) wird (4,24|0,2).
   (c) Eingezeichnet ist nebenstehend auch ein Steigungsdreieck sowie das gespiegelte Steigungsdreieck.
   Dabei wird aus $f'(0{,}2) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ beim Spiegeln $(f^{-1})'(4{,}24) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, allgemein also $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.



3. $y = \frac{x-3}{x+1}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Den Wertebereich findet man mit Hilfe einer kleinen Skizze oder im Laufe der Aufgaben-Bearbeitung.
   Variablentausch: $x = \frac{y-3}{y+1}$, $y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
   Auflösen (mit HN multiplizieren, gesuchte Variablen-Stücke auf eine Seite):
   $x(y+1) = y-3$; $xy + x = y-3$; $3+x = y - xy$; $3+x = y(1-x)$; $y = \frac{3+x}{1-x}$
   Also: $f^{-1}(x) = \frac{3+x}{1-x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

4. Für die Umkehrbarkeit ist notwendig, dass man zu jedem y-Wert von W_f **genau einen** x-Wert hat. Wenn eine Funktion streng monoton ist, dann hat sie diese Eigenschaft.
   Hier: $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$ für alle x, also ist die Funktion streng monoton steigend und somit umkehrbar.

5. $p'(x) = 2x - 2$. Steigung der Tangente in Q: $m = p'(2) = 2$.
   Steigung der Geraden: $f_k'(x) = 2k$, diese muss für Parallelität gleich 2 sein:
   $2k = 2$, also $k = 1$.

6. (a) $f_a'(x) = \frac{1}{a^2} \cdot 3x^2 - \frac{3}{a} \cdot 2x - 9 = \frac{3}{a^2}x^2 - \frac{6}{a}x - 9$. $f_a'(x) = 0$ liefert:
   $$x_{1/2} = \frac{\frac{6}{a} \pm \sqrt{\frac{36}{a^2} - 4 \cdot \frac{3}{a^2} \cdot (-9)}}{2 \cdot \frac{3}{a^2}} = \left(\frac{6}{a} \pm \frac{12}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{6}, \text{ also } x_1 = 3a,\ x_2 = -a.$$

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
steigt	$3a$	fällt	$-a$	steigt

   Für die Vorzeichenbereiche beachte man, dass $3a$ „links" von $-a$ liegt, da a negativ ist, und dass die durch die Ableitung f' gegebene Parabel (wegen $\frac{3}{a^2} > 0$) nach oben geöffnet ist, also die Vorzeichenabfolge „+ − +" hat.
   Also Maximalstelle $x = 3a$ mit y-Wert $f_a(3a) = \frac{1}{a^2} \cdot (3a)^3 - \frac{3}{a} \cdot (3a)^2 - 9 \cdot 3a + 5(a+1) = 27a - 27a - 27a + 5a + 5 = -24a + 5$.
   (b) Löst man die Gleichung für den x-Wert des Maximums $x = 3a$ nach a auf (also $a = \frac{x}{3}$) und setzt in die Gleichung für den y-Wert $y = -24a + 5$ ein, so erhält man $y = -24 \cdot \frac{x}{3} + 5 = -8x + 5$. Die Maxima liegen also alle auf der Geraden $y = -8x + 5$.