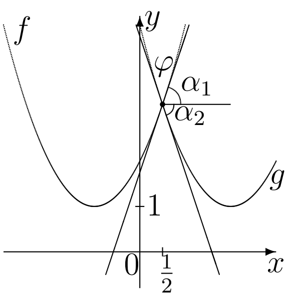
11. Klasse Lösungen — 11
Tangenten, Extrema, Newton-Verfahren — 03

1.
$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 8$
Tangente:
$y = f(1) = -36$. Also $P(1|-36)$.
$m = f'(1) = 19$
Ansatz für die Tangente: $y = 19x + t$.
P einsetzen: $-36 = 19 \cdot 1 + t$; $t = -55$.
Also Tangente: $y = 19x - 55$.

Normale:
$y = f(-1) = -54$. Also $Q(-1|-54)$.
Funktionssteigung $m_1 = f'(-1) = 3$.
Für die Normalensteigung m_2 gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$, also $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$
Ansatz für die Normale: $y = -\frac{1}{3}x + t$
Q einsetzen: $-54 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + t$; $t = -54\frac{1}{3}$. Also Normale: $y = -\frac{1}{3}x - 54\frac{1}{3}$.

2.
Falls ein Berührpunkt vorliegt, muss dort die Geradensteigung gleich der Funktionssteigung sein: $g'(x) = f'(x)$:
$\frac{15}{4} = 3x^2 - 3$; $x_{1/2} = \pm\frac{3}{2}$.
Zusätzlich muss ein gemeinsamer Punkt vorliegen, also $g(x) = f(x)$ sein.
Für $x_1 = +\frac{3}{2}$ ist (einsetzen, nachrechnen!) dies nicht der Fall, dagegen für $x_2 = -\frac{3}{2}$ ist $g(x_2) = f(x_2) = \frac{25}{8}$, so dass die Gerade im Punkt $(-\frac{3}{2}|\frac{25}{8})$ Tangente des Funktionsgraphen ist.

3.
Schnittstelle: $f(x) = g(x) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Steigungen: $f'(x) = 2x+2$, $g'(x) = 2x-4$.
$m_1 = f'(\frac{1}{2}) = 3$, $m_2 = g'(\frac{1}{2}) = -3$.
$\tan\alpha = m \Rightarrow \alpha_1 \approx 71{,}6°$, $\alpha_2 \approx -71{,}6°$.



Größerer Winkel zwischen den Tangenten: $\alpha_1 + |\alpha_2| = \alpha_1 - \alpha_2 = 71{,}6° + 71{,}6° = 143{,}2°$.
Kleinerer Winkel (Schnittwinkel): $\varphi = 180° - 143{,}2° = 36{,}8°$.

4.
(a) Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2 - 4x + 6) = 0$: $x_{1/2} = 0$ (doppelt), keine weitere Lösung aus $x^2 - 4x + 6 = 0$.

Extrema/Monotonie:
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$
$f'(x) = 0$: $4x(x^2 - 3x + 3) = 0$;
$x_1 = 0$ (wie erwartet); keine weitere Lösung aus $x^2 - 3x + 3 = 0$.

$f' < 0$		$f' > 0$
fällt	0	steigt
	Min$(0;0)$	

(b) Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2 - 9) = 0$; $x_{1/2} = 0$ (doppelt), $x_{3/4} = \pm 3$.

Extrema/Monotonie:
$f'(x) = 4x^3 - 18x = 4x(x^2 - 4{,}5) = 0$;
$x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{4{,}5}$

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
fällt	$-\sqrt{4{,}5}$	steigt	0	fällt	$\sqrt{4{,}5}$	steigt
	Min		Max		Min	

Min$(\pm\sqrt{4{,}5}|-20{,}25)$, Max$(0|0)$

Schnittwinkel bei der Nullstelle $x = 3$:
$m = f'(3) = 4 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3 = 54 = \tan\alpha$, also $\alpha \approx 88{,}94°$.
Achsensymmetrie von f, daher bei $x = -3$ Schnittwinkel $-88{,}94°$.

5.
$f'(x) = x - 1$
$f(x_0) = f(5) = 4{,}5$, also $P_0(5|4{,}5)$.
Tangentensteigung $f'(x_0) = f'(5) = 4$.
Erster Näherungswert und neuer Startwert:
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 5 - \frac{4{,}5}{4} = 3{,}875$.
Zweiter Iterationsschritt:
$f(x_1) = f(3{,}875) \approx 0{,}6328$, Tangentensteigung $f'(x_1) = f'(3{,}875) = 2{,}875$.
Zweiter Näherungswert:
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 3{,}875 - \frac{0{,}6328}{2{,}875} \approx 3{,}6549$.

6.
$f'(x) = 2x - \sqrt{2} = 0$. $\quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dann ist $c = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1} =$
$= \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.