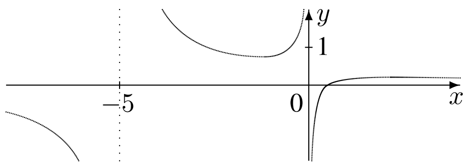
11. Klasse Lösungen	**11**
Gebrochen-rationale Funktionen, lim $x \to x_0$	**01**

1. Faktorisieren: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+5x} = \frac{2(x-0{,}5)}{x(x+5)}$.
   $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x) =$ „$\frac{-1}{(\pm 0)\cdot 5}$“ $\to \mp\infty$.
   $\lim\limits_{x\to -5\pm 0} f(x) =$ „$\frac{-11}{(-5)\cdot(\pm 0)}$“ $\to \pm\infty$.



2. Bei einer Polstelle ungerader Vielfachheit erhält man einen Vorzeichenwechsel (Vzw); bei gerader Vielfachheit liegt bei Annäherung von links und von rechts das gleiche Vorzeichen vor. Definitionslücke ist in allen gegebenen Beispielen $x = -3$.
   (a) $f(x) = \frac{-x^2}{3(x+3)^2}$. Polstelle 2. Ordnung, kein Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) =$ „$\frac{-9}{+0}$“ $\to -\infty$
   (b) $f(x) = \frac{x^2}{(x+3)^3}$. Polstelle 3. Ordnung, Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) =$ „$\frac{+9}{\pm 0}$“ $\to \pm\infty$
   (c) $f(x) = \frac{(2+x)(2-x)}{(x+3)(x^2-3x+9)}$. Polstelle 1. Ordnung, Vzw. $\lim\limits_{x\to -3\pm 0} f(x) =$ „$\frac{-5}{\pm 0}$“ $\to \mp\infty$
   Damit ergibt sich: Abbildung A ist f_1, B ist f_2, C ist f_3.

3. Direkt mit Faktorisieren: $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x^2}{2(x+1)}$. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x) =$ „$\frac{(1\pm 0)^2}{2\cdot(1\pm 0+1)}$“ $= \frac{1}{4}$.
   h-Methode ohne Faktorisieren: $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(1\pm h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(1\pm h)^3-(1\pm h)^2}{2(1\pm h)^2-2} =$
   $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1\pm 3h+3h^2\pm h^3-1\mp 2h-h^2}{2(1\pm 2h+h^2)-2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(\pm 1+2h\pm h^2)}{h(\pm 4+2h)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\pm 1+2h\pm h^2}{\pm 4+2h} = \frac{\pm 1}{\pm 4} = \frac{1}{4}$.

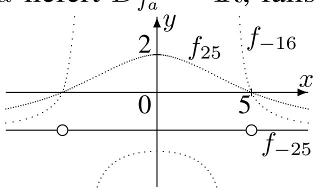
4. Definitionslücken: $x^2 - 3x + 2 = 0$ ergibt $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.
   Faktorisierte Form: $f(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{2(x+1)}{x-2}$.
   Vorzeichenbereiche: $f > 0$ | -1 (Nullstelle) | $f < 0$ | 1 (hebbare Def.lücke) | $f < 0$ | 2 (Def.lücke) | $f > 0$
   $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2(1\pm h)^2-2}{(1\pm h)^2-3(1\pm h)+2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\pm 4h+2h^2}{\mp h+h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(\pm 4+2h)}{h(\mp 1+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\pm 4+2h}{\mp 1+h} = -4$

5.

	$f(x)$	Senkrechte Asymptote (Pol)	Asymptote für $x \to \pm\infty$
(a)	$\frac{(x+2)(x-2)}{x(x^2+8)}$	$x = 0$	Waagrecht: $y = 0$
(b)	$\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+8)}$	$x = 0$ und $x = -8$	Waagrecht: $y = 1$
(c)	$x + \frac{12x}{(x+2)(x-2)}$	$x = -2$ und $x = 2$	Schräg: $y = x$
(d)	$3x - \sqrt{2} + \frac{1}{x-1}$	$x = 1$	Schräg: $y = 3x - \sqrt{2}$
(e)	$\frac{7}{2}x - 3 - \frac{3}{2x}$	$x = 0$	Schräg: $y = \frac{7}{2}x - 3$

   Zu (c): $f(x) = x + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)}{x^2-4} + \frac{12x}{x^2-4} = \frac{x^3-4x+12x}{x^2-4} = \frac{x^3+8x}{x^2-4} = \frac{x(x^2+8)}{(x+2)(x-2)}$

6. (a) Definitionsbereich: Nenner $x^2 + a = 0$, also $x^2 = -a$ liefert $D_{f_a} = \mathbb{R}$, falls $a > 0$, und $D_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\{\pm\sqrt{-a}\}$, falls $a \le 0$.
   Nullstellen: Zähler $-2x^2 + 50 = 0$ liefert $x_{1/2} = \pm 5$.
   Einsetzen von $x = 0$ ergibt $Y_a(0|\frac{50}{a})$ $(a \neq 0)$.



   (b) Faktorisieren für $a < 0$: $f_a(x) = \frac{-2(x+5)(x-5)}{(x+\sqrt{-a})(x-\sqrt{-a})}$.
   $\lim\limits_{x\to\sqrt{-a}\pm 0} f_a(x) =$ „$\frac{-2(\sqrt{-a}\pm 0+5)(\sqrt{-a}\pm 0-5)}{(\sqrt{-a}\pm 0+\sqrt{-a})(\sqrt{-a}\pm 0-\sqrt{-a})}$“ $=$ „$\frac{-2(\sqrt{-a}+5)(\sqrt{-a}-5)}{(2\sqrt{-a})(\pm 0)}$“ $\to \pm\infty$,
   denn für $-25 < a < 0$ ist $\sqrt{-a} - 5$ negativ, der Zähler insgesamt also positiv.
   (c) Man beachte, dass $f_{-25}(x) = \frac{-2(x^2-25)}{x^2-25} = -2$ mit $D_{f_{-25}} = \mathbb{R}\backslash\{\pm 5\}$.