10. Klasse Lösungen — 10

Kugel — 09

1. Radius $r = 6$ mm. $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6\text{mm})^3 = 288\pi$ mm$^3 \approx 905$ mm^3.
   $O = 4r^2\pi = 4 \cdot (6 \text{ mm})^2 = 144\pi$ mm$^2 \approx 452$ mm^2

2. Der Körper ist zusammengesetzt aus einer Halbkugel plus einem Zylinder minus einem herausgeschnittenen Kegel (mit Mantellinie $m_{\text{Keg}} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$).
   $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} r_{\text{Kug}}^3 \pi + r_{\text{Zyl}}^2 \pi h_{\text{Zyl}} - \frac{1}{3} r_{\text{Keg}}^2 \pi h_{\text{Keg}} = \frac{2}{3}(3a)^3\pi + (3a)^2\pi \cdot 4a - \frac{1}{3}(3a)^2\pi \cdot 4a = 42\pi a^3$.
   $O = \frac{1}{2} 4\pi r_{\text{Kug}}^2 + 2r_{\text{Zyl}}\pi h_{\text{Zyl}} + \pi r_{\text{Keg}} m_{\text{Keg}} = 2\pi(3a)^2 + 2\pi \cdot 3a \cdot 4a + 3a \cdot 5a\pi = 57\pi a^2$.
   Für $V = 1$ dm^3 muss gelten: $42\pi a^3 = 1$ dm^3, also $a = \sqrt[3]{\frac{1 \text{ dm}^3}{42\pi}} \approx 0{,}196$ dm $= 1{,}96$ cm.

3. (a) $V = \frac{1}{2}(V_{\text{gr.Kug}} - V_{\text{kl.Kug}}) + V_{\text{gr.Zyl}} - V_{\text{kl.Zyl}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}(40^3 - 38^3)\pi + (10^2 - 8^2)\pi \cdot 80 \approx 28165$
   (b) $M = 2r_1\pi h = 2 \cdot 9 \cdot 80 \cdot \pi = 1440\pi$; $A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r_2^2 = 2 \cdot 39^2\pi = 3042\pi$.
   $M + A \approx 14081$, also $(M + A)d \approx V$. (Alle Maße in mm bzw. mm^3).
   („Fläche mal Dicke ergibt Volumen“).
   (c) Bei m-facher Größe werden Volumina m^3-fach und Flächen m^2-fach, bei doppelter Größe also V 8-fach und $M + A$ 4-fach.

4. (a) $u = 2r\pi$, also $r = \frac{u}{2\pi} = \frac{40\,000 \text{ km}}{2\pi} \approx 6366$ km.
   Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3}\pi(6366 \cdot 10^3 \text{ m})^3 \approx 1{,}08 \cdot 10^{21}$ m$^3 = 1{,}08 \cdot 10^{24}$ dm^3
   Dichte $\rho = \frac{m}{V} = \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{1{,}08 \cdot 10^{24} \text{ dm}^3} \approx 5{,}6 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ ist kleiner als die Dichte von Eisen.
   (b)
   - $r = \frac{u}{2\pi}$ bzw. $r_{\text{neu}} = \frac{u+1 \text{ m}}{2\pi}$,
     $\Delta r = r_{\text{neu}} - r = \frac{u}{2\pi} - \frac{u+1 \text{ m}}{2\pi} = \frac{u-(u+1 \text{ m}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$ m$\approx 0{,}16$ m$= 16$ cm.
   - $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ bzw. $V_{\text{neu}} = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3)$.
     $V_{\text{Kugelschale}} = V_{\text{neu}} - V = \frac{4}{3}\pi(3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3)$
     $= \frac{4}{3}\pi\Delta r(3r^2 + 3r\Delta r + (\Delta r)^2)$.
     Die Oberfläche ergibt sich, indem man das Volumen durch die Dicke teilt:
     $O = \frac{V}{d} = \frac{\frac{4}{3}\pi\Delta r(3r^2+3r\Delta r+(\Delta r)^2)}{\Delta r} = \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3r\Delta r + (\Delta r)^2)$.
     Da Δr im Vergleich zu r sehr klein ist, kann man bei der Summe die hinteren beiden Summanden weglassen, also
     $O \approx \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2 \approx 4\pi \cdot (6366 \text{ km})^2 \approx 509$ Millionen km^2

5. $V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, also $r^3 = \frac{V_{\text{Halbkugel}} \cdot 2 \cdot 3}{4\pi} = \frac{1 \text{ dm}^3 \cdot 3}{2\pi}$,
   also $r = \sqrt[3]{\frac{1 \text{ dm}^3 \cdot 3}{2\pi}} \approx 0{,}7816$ dm$= 7{,}816$ cm.

   - Die erste Behauptung stimmt, denn $V_{\text{Zyl}} = r_{\text{Zyl}}^2\pi h_{\text{Zyl}} = r^2\pi \cdot 2r = \pi r^3$.
     Im Vergleich zu $V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$ sieht man, dass das Halbkugelvolumen $V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3}\pi r^3$ tatsächlich $\frac{2}{3}$ des Zylindervolumens ausmacht, der Zylinder also zu $\frac{2}{3}$ voll wird.
   - Die zweite Behauptung stimmt, denn $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} r_{\text{Kegel}}^2 \pi h_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r = \frac{1}{3} r^3$; das Halbkugelvolumen $\frac{2}{3}\pi r^3$ ist also tatsächlich das Doppelte des Kegelvolumens.