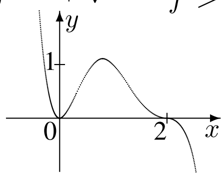
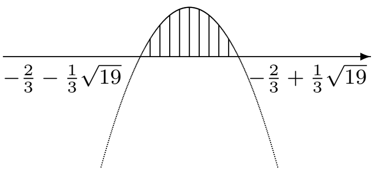
10. Klasse Lösungen — 10
Vorzeichenbereiche — 06

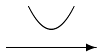
1. $(x-1)(x^2-2x-2)=0$. $x_1=1$ oder $x^2-2x-2=0$; $x_{2/3}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=1\pm\sqrt{3}$.
   Faktorisierte Form: $f(x)=(x-1)(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))$.
   Lauter einfache Nullstellen mit Vorzeichenwechsel. Ferner sieht man für große x-Werte $f(x)>0$. Somit:
   $f<0$ $\quad 1-\sqrt{3} \quad$ $f>0$ $\quad 1 \quad$ $f<0$ $\quad 1+\sqrt{3} \quad$ $f>0$
2. $f(x)=0$; $x_{1/2/3}=2$ (3-fache Nullstelle, Vorzeichenwechsel);
   $x_{4/5}=0$ (doppelte Nullstelle, kein Vorzeichenwechsel).
   Somit (da z. B. $f(3)=-9$): $f>0$ $\quad 0 \quad$ $f>0$ $\quad 2 \quad$ $f<0$



3. (a) Löse die zugehörige quadratische Gleichung: $-3x^2-4x+5=0$:
   $x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot 3\cdot 5}}{2\cdot(-3)}=\frac{4\pm\sqrt{76}}{-6}=-\frac{2}{3}\mp\frac{1}{3}\sqrt{19}$.
   Nach unten geöffnete Parabel mit Bereich „≥ 0“ (Bild rechts).
   Also ist $L=[-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{19};-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{19}]$.



   (b) Ungleichung: $x^2+10<3x$
   Zuerst alles auf eine Seite bringen: $x^2-3x+10<0$.
   Zugehörige quadratische Gleichung: $x^2-3x+10=0$.



   $x_{1/2}=1{,}5\pm\sqrt{2{,}25-10}$ ↯, also keine Lösungen, also ist der Graph von $y=x^2-3x+10$ eine „schwebende“ nach oben geöffnete Parabel (siehe Bild), bei der die Werte unterhalb (wegen „<“) der x-Achse gesucht sind. Da es solche Werte nicht gibt, ist $L=\{\}$, d. h. die Parabel $y=x^2+10$ verläuft nirgends unterhalb der Geraden $y=3x$.
4. Es muss gelten: Radikand $r(x)=5x^2-40x-100\geq 0$.
   Nullstellen von r: $x_{1/2}=\frac{40\pm\sqrt{1600-4\cdot 5\cdot(-100)}}{2\cdot 5}=\frac{40\pm 60}{10}$; $x_1=10$; $x_2=-2$.
   Da r eine nach oben geöffnete Parabel ist: $r>0$ $\quad -2 \quad$ $r<0$ $\quad 10 \quad$ $r>0$
   Somit: $D_f=]-\infty;-2]\cup[10;+\infty[$.
5. $f(x)=-(x+1)(x^5-2x^2)=(-1)(x+1)x^2(x^3-2)=0$. $x_1=-1$ (einfach), $x_{2/3}=0$ (doppelt), oder $x^3-2=0$, d. h. $x_4=\sqrt[3]{2}$ (einfach).
   Durch Einsetzen geeigneter Funktionswerte oder durch Betrachtung der Vorzeichen der Linearfaktoren oder mit der Vielfachheit der Nullstellen und dem prinzipiellen Verlauf von links unten nach rechts unten erhält man:
   $f<0$ $\quad -1 \quad$ $f>0$ $\quad 0 \quad$ $f>0$ $\quad \sqrt[3]{2} \quad$ $f<0$
6. Nullstellen: $\frac{x^2+2x+3}{x^2(x^2+x+1)^2}=0$. Multiplikation mit dem Nenner ergibt: $x^2+2x+3=0$.
   Da die Gleichung $x^2+2x+3=0$ keine Lösung hat, gibt es keine Nullstellen und der Zähler ist (wenn man sich die nach oben geöffnete ohne Nullstellen „schwebende“ Parabel vorstellt) stets >0.
   Definitionslücken, falls der Nenner gleich 0 wird: $x^2(x^2+x+1)^2=0$. $x_{1/2}=0$; die Gleichung $x^2+x+1=0$ hat wiederum keine Lösung, somit Definitionsbereich $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, der Nenner ist wegen des Quadrats ebenfalls stets >0.
   Somit: $f>0$ $\quad 0\notin D \quad$ $f>0$
   Der Graph von f verläuft somit in ganz $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ oberhalb der x-Achse.