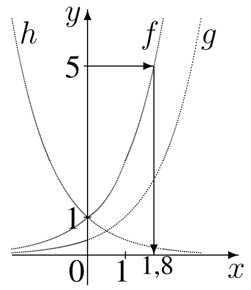
10. Klasse Lösungen — 10

Exponentialfunktion und Logarithmus — 01

1.

x	-1	0	1
$f(x)$	$0{,}4$	1	$2{,}5$
$g(x)$	$0{,}16$	$0{,}4$	1
$h(x)$	$2{,}5$	1	$0{,}4$

Graphische Lösung von $2{,}5^x = 5$ ergibt $x \approx 1{,}8$.



g ist gegenüber f um eine Einheit nach rechts verschoben, bzw. wegen $g(x) = 2{,}5^x \cdot 2{,}5^{-1} = 0{,}4 \cdot 2{,}5^x$ mit dem Faktor $0{,}4$ in y-Richtung gestaucht.
h ist gegenüber f an der y-Achse gespiegelt, denn $h(x) = (\frac{2}{5})^x = (\frac{5}{2})^{-x} = 2{,}5^{-x} = f(-x)$.

2. (a) $f(1996) = 313 = 84a^6$, also $a = \sqrt[6]{\frac{313}{84}} = (\frac{313}{84})^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}25$, d. h. $+25$ % pro Jahr.
$f(1984) = 84a^{-6} \approx 22$ passt; $f(2002) = 84a^{12} \approx 1200$ passt nicht.
Da sich a^x für $x \to -\infty$ nur asymptotisch der 0 nähert, aber stets > 0 ist, lag die Fläche 0 ha zu keinem Zeitpunkt vor.

(b) Mit x = Zeit in Sekunden ist $f(x) = 20\,000 \cdot (\frac{1}{10})^{\frac{x}{183}}$ [oder Ansatz $f(x) = 20\,000 \cdot a^x$ liefert $f(183) = \frac{1}{10} \cdot 20\,000$, also $a^{183} = \frac{1}{10}$, $a = \sqrt[183]{0{,}1} \approx 0{,}9875$].
Die Halbwertszeit x folgt aus $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 20\,000$, also $(\frac{1}{10})^{\frac{x}{183}} = 0{,}5$. Beidseitiges Logarithmieren liefert $\log 0{,}1^{\frac{x}{183}} = \log 0{,}5$, also $\frac{x}{183} \cdot \log 0{,}1 = \log 0{,}5$, also $x = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}1} \cdot 183 \approx 55$. Die Halbwertszeit beträgt also ca. 55 s.

(c) Lineare Abnahme pro Tag um $\frac{18\,000}{183} \approx 98$ Stück, also $f(x) = 20\,000 - \frac{18\,000}{183}x$.

3. (a) $\ldots = \log_3(3^4) = 4\log_3(3) = 4$ (b) $\ldots = \log_a(a^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}\log_a(a) = \frac{1}{3}$
(c) $\ldots = \log_3(3^2) + \log_3(a^3) + \log_3(b) = 2 + 3\log_3(a) + \log_3(b)$
(d) $\ldots = \log_{10}((10 + \frac{1}{a})(10 - \frac{1}{a})) = \log_{10}(10 + \frac{1}{a}) + \log_{10}(10 - \frac{1}{a})$
(e) $\ldots = \frac{\log_{10}(0{,}50)}{\log_{10}(3)} \approx -0{,}63$ (Weitere Vereinfachung bei (d) nicht möglich!)

4. (a) $1{,}05^x = 10$; $\log 1{,}05^x = \log 10$; $x \log 1{,}05 = \log 10$; $x = \frac{\log 10}{\log 1{,}05} \approx 47{,}2$
(b) $7 \cdot 6^{5x-4} - 3 = 2$; $6^{5x-4} = \frac{5}{7}$; $\log 6^{5x-4} = \log \frac{5}{7}$; $(5x-4)\log 6 = \log \frac{5}{7}$;
$x = (\frac{\log \frac{5}{7}}{\log 6} + 4) : 5 \approx 0{,}762$
(c) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x-1} = 36$; $2 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{-1} \cdot 2^x = 36$; $(2 + \frac{5}{2})2^x = 36$; $2^x = 8$; $x = 3$
(d) $3^{x+1} = 5 \cdot 4^{x-1}$; $\log 3^{x+1} = \log(5 \cdot 4^{x-1})$; $(x+1)\log 3 = \log 5 + (x-1)\log 4$;
$(\log 3 - \log 4)x = \log 5 - \log 4 - \log 3$; $x = \frac{\log 5 - \log 4 - \log 3}{\log 3 - \log 4} \approx 3{,}04$
(e) Umformung $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$ und Substitution $u = 3^x$ liefern:
$u^2 - 12u + 27 = 0$; $u_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2 \cdot 1}$, also $u_1 = 3$, $u_2 = 9$.
Rücksubstitution: $3^x = 3$ oder $3^x = 9$, somit $x = 1$ oder $x = 2$.

5. (a) Für den Abstand zwischen 1 und 10 misst man ca. 2,1 cm, also gilt für die gesuchte Basis b: $\log_b 10 - \log_b 1 = 2{,}1$, also $\log_b 10 = 2{,}1$. Somit $b^{2{,}1} = 10$, also $b = \frac{\log 10}{\log 2{,}1} \approx 3$.

$$2{,}1 \underset{\log_b \ldots}{\overset{b^{\cdots}}{\rightleftarrows}} 10$$

(b) Von 1 Euro bis K1 misst man ca. 13,2 cm, also ist $\log_3 x = 13{,}2$. Somit $x = 3^{13{,}2} \approx 2 \cdot 10^6$. (Tatsächlich betrug der Gewinn 1,87 Millionen Euro).

$$13{,}2 \underset{\log_3 \ldots}{\overset{3^{\cdots}}{\rightleftarrows}} x$$

(c) Mit k_i = Gewinn in Gewinnklasse i ist $\log_3(k_4) - \log_3(k_5) = \log_3(k_5) - \log_3(k_6)$, also $\log_3(\frac{k_4}{k_5}) = \log_3(\frac{k_5}{k_6})$ und somit $\frac{k_4}{k_5} = \frac{k_5}{k_6}$, d. h. gleiche Verhältnisse, d. h. die Gewinne vervielfachen sich von Gewinnklasse zu Gewinnklasse jeweils mit dem gleichen Faktor; es ist $k_6 = 7$, $k_5 = 70$, $k_4 = 700$, $k_3 = 7000$ usw.