10. Klasse Lösungen | 10
Polynomdivision (nicht im Lehrplan) | 10

1.
(Den Vorzeichenwechsel möge der Leser in dieser und den folgenden Aufgaben in den jeweils unterstrichenen Zeilen mit Farbstift selbst vornehmen, also z. B. im ersten Schritt $-x^3 - 3x^2$).

$$
\begin{array}{l}
(x^3 \qquad\qquad + 8) : (x+2) = x^2 - 2x + 4 \\
\underline{x^3 + 2x^2} \\
\quad -2x^2 \\
\quad \underline{-2x^2 - 4x} \\
\qquad\quad 4x + 8 \\
\qquad\quad \underline{4x + 8} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Probe: $(x^2 - 2x + 4) \cdot (x + 2) =$
$x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 4x + 8 = x^3 + 8$ (o. k.)

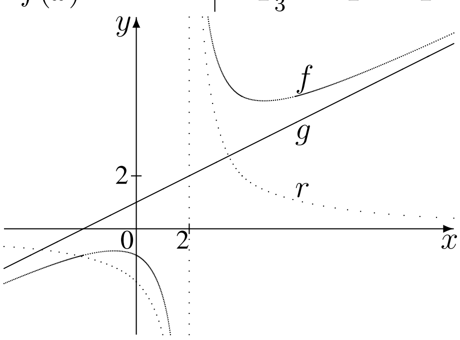
2.
(a)

$$
\begin{array}{l}
(x^4 \qquad - 7x^2 + x - 1) : (x - 2) = \\
\underline{x^4 - 2x^3} \qquad\qquad = x^3 + 2x^2 - 3x - 5 - \frac{11}{x-2} \\
\quad 2x^3 - 7x^2 \\
\quad \underline{2x^3 - 4x^2} \\
\qquad -3x^2 + x \\
\qquad \underline{-3x^2 + 6x} \\
\qquad\quad -5x - 1 \\
\qquad\quad \underline{-5x + 10} \\
\qquad\qquad -11
\end{array}
$$

(b)
$f(x) = \frac{x^2+4}{2x-4} =$

$$
\begin{array}{l}
= (x^2 \qquad + 4) : (2x - 4) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{8}{2x-4} = \\
\quad \underline{x^2 - 2x} \qquad\qquad\qquad = g(x) \quad + r(x) \\
\qquad 2x + 4 \\
\qquad \underline{2x - 4} \\
\qquad\quad 8
\end{array}
$$

x	-4	-2	0	2	4	12
$g(x) = \frac{1}{2}x + 1$	-1	0	1	2	3	7
$r(x) = \frac{4}{x-2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	↯	2	$0{,}4$
$f(x)$	$-1\frac{2}{3}$	-1	-1	↯	5	$7{,}4$



Für sehr große x-Werte schmiegt sich f an die schräge Asymptote g an.

3.
$x^3 - 4x^2 + 10x - 12 = 0$.
Probiere $x = 1$: $1^3 - 4 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 12 \neq 0$ geht nicht, $x = -1$ geht nicht, $x_1 = 2$ geht: $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 12 = 0$. Also Polynomdivision durch $(x - 2)$:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 10x - 12) : (x - 2) = \\
\underline{x^3 - 2x^2} \qquad\qquad\qquad = x^2 - 2x + 6 \\
\quad - 2x^2 + 10x \\
\quad \underline{- 2x^2 + \ \ 4x} \\
\qquad\qquad 6x - 12 \qquad \ldots \text{ usw.}
\end{array}
$$

$x^2 - 2x + 6 = 0$; $x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$ ↯ (kann nicht weiter faktorisiert werden).
Also $x_1 = 2$ einzige Lösung. Somit:
$x^3 - 4x^2 + 10x - 12 = (x - 2)(x^2 - 2x + 6)$.

4.
$f(x) = x^2(x^3 + 5x^2 - 13x + 7)$.
Also $x_{1/2} = 0$ (doppelt).
Nullstelle „raten“: $x_3 = 1$.
Polynomdivision
$(x^3 + 5x^2 - 13x + 7) : (x - 1) =$
$\ldots \qquad = x^2 + 6x - 7$
$x^2 + 6x - 7 = 0$;
$x_{4/5} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2}$;
$x_4 = 1$ (doppelt); $x_5 = -7$.
Somit: $f(x) = x^2(x - 1)^2(x + 7)$.

5.
$f(2{,}5) = 4 \cdot 2{,}5^3 - 6 \cdot 2{,}5^2 + 3 = 28$, $g(2{,}5) = 13 \cdot 2{,}5 - 4{,}5 = 28$. Also ist $(2{,}5|28)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen.
Schnittpunkte: $f(x) = g(x)$;
$4x^3 - 6x^2 + 3 = 13x - 4{,}5$;
$4x^3 - 6x^2 - 13x + 7{,}5 = 0$.
Da die Lösung $x_1 = 2{,}5$ schon bekannt ist, Polynomdivision durch $(x - 2{,}5)$:
$(4x^3 - 6x^2 - 13x + 7{,}5) : (x - 2{,}5) =$
$\ldots \qquad = 4x^2 + 4x - 3$
$4x^2 + 4x - 3 = 0$; $x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4}$;
$x_2 = 0{,}5$; $x_3 = -1{,}5$.
Durch Einsetzen dieser x-Werte in f oder g erhält man die y-Werte der weiteren Schnittpunkte: $(0{,}5|2)$ und $(-1{,}5| - 24)$.