Grundwissen weitere Themen (alter LP) — W
Kurvendiskussion: Musteraufgabe — 09

$f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3}$

Theorie: → Grundwissen W/8

D: Nenner $x^3 = 0$ liefert Definitionslücke $x = 0$. Also: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

A: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}}{1} = 0.$

Also waagrechte Asymptote $y = 0$ (d. h. die x-Achse ist Asymptote).

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \text{„}\dfrac{-1}{-0}\text{"} \to +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \text{„}\dfrac{-1}{+0}\text{"} \to -\infty$

Also senkrechte Asymptote x=0 (Pol 3. Ordnung)

S: $f(-x) = \frac{3\cdot(-x)^2-1}{(-x)^3} = \frac{3x^2-1}{-x^3} = -f(x)$

Also Punktsymmetrie zum Ursprung.

N: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}58$

E: $f'(x) = \dfrac{x^3 \cdot 6x - (3x^2 - 1)\cdot 3x^2}{x^6} \overset{\text{kürzen!}}{=} \dfrac{-3x^2 + 3}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$
fällt	-1	steigt	0	steigt	1	fällt
	Min		$\notin D_f$		Max	
	$(-1\mid -2)$				$(1\mid 2)$	

↖ Durch Einsetzen von -1 in $f(x)$

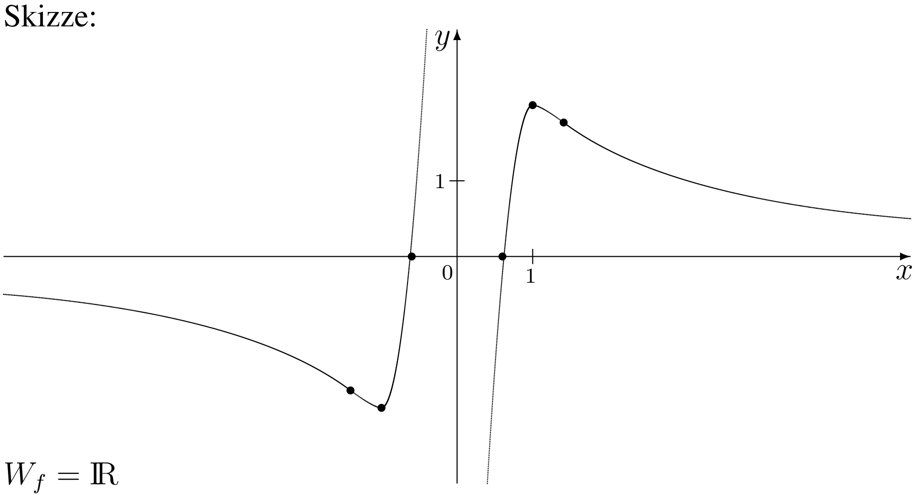
Zur Vorzeichenbestimmung beachte man, dass hier bei f' der Nenner stets ≥ 0 ist und somit das Vorzeichen vom Zähler „gemacht" wird.

W: $f''(x) = \dfrac{x^4 \cdot (-6x) - (-3x^2 + 3)\cdot 4x^3}{x^8} \overset{\text{kürzen!}}{=} \dfrac{-6x^2 - (-3x^2 + 3)\cdot 4}{x^5} = \dfrac{6x^2 - 12}{x^5}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}.$

$f'' < 0$		$f'' > 0$		$f'' < 0$		$f'' > 0$
rechts-	$-\sqrt{2}$	links-	0	rechts-	$\sqrt{2}$	linksgekrümmt
	WP		$\notin D_f$		WP	
	$(-\sqrt{2}\mid -\frac{5}{2\sqrt{2}})$				$(\sqrt{2}\mid \frac{5}{2\sqrt{2}})$	

Skizze:



$W_f = \mathbb{R}$