

Kombinatorik = Abzählen von Mengen

Beispiele → grundw12.pdf

Allgemein und fundamental ist das folgende

### Zählprinzip (Produktregel, Multiplikationsprinzip)

Ein Versuch wird in  $k$  Stufen durchgeführt. Auf der 1. Stufe gebe es  $n_1$  mögliche Ergebnisse, auf der 2. Stufe jeweils<sup>1</sup>  $n_2$  mögliche Ergebnisse, ..., auf der  $k$ -ten Stufe jeweils<sup>1</sup>  $n_k$  mögliche Ergebnisse.

Dann gibt es bei dem Versuch insgesamt  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$  mögliche Ergebnisse.

In vielen Fällen geht es darum, „Objekte“ auf „Zellen“ zu verteilen oder aus einer „Urne“ eine „Stichprobe“ zu ziehen. Dabei ist darauf zu achten, ob es in dieser Stichprobe auf die Reihenfolge ankommt oder nicht (geordnet/ungeordnet) und ob Elemente darin mehrfach vorkommen dürfen oder nicht (mit/ohne Wiederholung).<sup>2</sup>

### Geordnete Stichproben mit Wiederholung ( $k$ -Tupel)

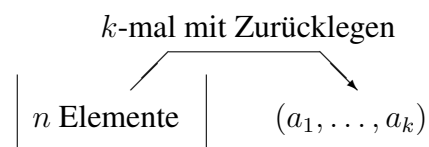
Es gibt

$$n^k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n \quad (k \text{ Faktoren})$$

$k$ -Tupel aus einer  $n$ -elementigen Menge.

Andere Sichtweise:

Es gibt  $n^k$  Möglichkeiten,  $k$  verschiedene Objekte auf  $n$  Zellen zu verteilen (wobei die Zellen auch mehrere Objekte erhalten dürfen).<sup>3</sup>



### Geordnete Stichproben ohne Wiederholung ( $k$ -Permutationen)

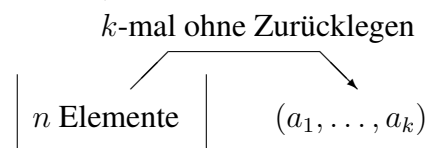
Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

$k$ -Permutationen aus einer  $n$ -elementigen Menge.

Andere Sichtweise:

Es gibt  $\frac{n!}{(n-k)!}$  Möglichkeiten,  $k$  verschiedene Objekte auf  $n$  Zellen so zu verteilen, dass jede Zelle höchstens ein Objekt erhält.<sup>3</sup>



### Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung ( $k$ -Teilmengen)

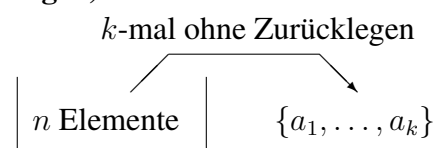
Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (,k \text{ aus } n')$$

$k$ -Teilmengen aus einer  $n$ -elementigen Menge.

Andere Sichtweise:

Es gibt  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten,  $k$  ununterscheidbare Objekte auf  $n$  Zellen so zu verteilen, dass jede Zelle höchstens ein Objekt erhält.<sup>4</sup>



### Tricks:

Manchmal muss man die gesuchte Menge zerlegen in zwei disjunkte<sup>5</sup> Mengen und deren Anzahlen bestimmen.

Manchmal (z. B. „enthält mindestens ein ...“) ist der Weg über das Komplement („enthält kein ...“) bequem.

Manchmal ist die Anzahl so klein, dass man alles systematisch hinschreiben kann.

<sup>1</sup>Unabhängig vom Ausgang der vorhergehenden Stufen.

<sup>2</sup>Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung → Leistungskurs.

<sup>3</sup>Wir denken uns: Jedes Objekt wählt seine Zellennummer.

<sup>4</sup>Wir denken uns: Es wird ausgewählt, welche Zellen ein Objekt erhalten.

<sup>5</sup>Keine gemeinsamen Elemente.