9. Klasse TOP 10 Mathematik	09
Gesamtes Grundwissen mit Übungen	**G**

Grundwissen Mathematik 9. Klasse: Die 10 wichtigsten Themen auf jeweils einer Seite!

Zum Wiederholen kann man die Übungen des Kompakt-Überblicks verwenden.

9/1	Wurzeln, binomische Formeln	G	Ü	L
9/2	Quadratische Funktionen: Scheitel	G	Ü	L
9/3	Quadratische Funktionen: Zeichnung	G	Ü	L
9/4	Quadratische Gleichungen	G	Ü	L
9/5	Vierfeldertafel, Additionssatz	G	Ü	L
9/6	Ähnlichkeit, Strahlensatz	G	Ü	L
9/7	Potenzfunktion, n-te Wurzel	G	Ü	L
9/8	Pythagoras	G	Ü	L
9/9	Trigonometrie	G	Ü	L
9/10	Lösen von Gleichungen: Überblick	G	Ü	L
9/K	Kompakt-Überblick zum Grundwissen	G	Ü	L
9/M	Mathematik bis 9. Klasse kompakt	–	Ü	L

G=Grundwissen, Ü=Übungen, L=Lösungen

9. Klasse TOP 10 Grundwissen	**9**
Wurzeln, binomische Formeln	**01**

- **Bedeutung von Wurzeln:**

  Das Wurzelziehen (Radizieren) ist die Umkehrung des Quadrierens. Daher ist z. B. $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ und $\sqrt{5}^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

  Da sowohl $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ als auch $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, muss man bei Variablen, deren Vorzeichen nicht bekannt ist, Betragsstriche setzen: $\sqrt{a^2} = |a|$.

  (Der Betrag einer Zahl a ist die Zahl a selbst, wenn a nichtnegativ ist, und ist die Gegenzahl $-a$, wenn $a < 0$ ist, z. B. also $|3| = 3$, $|-3| = 3$).

- **Definitionsbereich bei Wurzeln:**

  Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen, d. h. der Radikand muss ≥ 0 sein.

  Bei $\sqrt{x}$ muss also $x \geq 0$ sein,
  bei $\frac{1}{\sqrt{x+5}}$ muss $x + 5 > 0$ sein (wegen des Nenners hier $>$ statt $\geq$), d. h. $x > -5$.

- **Rechenregeln für Wurzeln:**

  Produkte und Quotienten/Brüche dürfen unter einer Wurzel zusammengefasst werden:
  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ac}} = \sqrt{\frac{ab}{ac}} = \sqrt{\frac{b}{c}}$

- **Wurzeln teilweise radizieren:**

  Man sucht unter der Wurzel quadratische Faktoren und zieht daraus die Wurzel:
  $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$
  $\sqrt{ab^2c^7} = \sqrt{ab^2c^6c} = bc^3\sqrt{ac}$ (für $a, b, c \geq 0$, sonst $|bc^3|$ mit Betrag!)
  $\sqrt{9x^2 - 36} = \sqrt{9(x^2 - 4)} = 3\sqrt{x^2 - 4}$ (keine weitere Vereinfachung möglich!)

  Umgekehrt: Davor stehende Faktoren quadratisch in die Wurzel: $3\sqrt{7} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63}$

- **Vorsicht: Fehlerquellen beim Rechnen mit Wurzeln:**

  Bei Summen und Differenzen die Wurzeln nicht einzeln ziehen, z. B. $\sqrt{25 - 16}$ ist nicht gleich $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ (links: $\sqrt{9} = 3$, rechts: $5 - 4 = 1$).
  Sondern: Ausdrücke wie $\sqrt{a^2 - b^2}$ oder $\sqrt{c + d}$ können nicht vereinfacht werden.

  Nicht in eine Wurzel hineinkürzen: Beispiel: $\frac{\sqrt{12}}{2}$ ist nicht $\sqrt{6}$.
  Sondern: Teilweise radizieren, falls möglich: $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, oder den Nenner quadratisch in die Wurzel hineinziehen: $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 12} = \sqrt{3}$.

- **Binomische Formeln: Siehe grund73.pdf**:

  Vergiss nicht 2 mal „das gemischte Produkt“!

  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

  Beispiele zur Bererchung binomischer Formeln, auch zum umgekehrten **Faktorisieren**, d. h. Verwandeln der Summe/Differenz in ein Produkt:
  $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
  $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$ (Kontrolle: Gemischtes Produkt $2 \cdot x \cdot 7 = 14x$ passt).
  $x^2 - \frac{1}{4}a^2 = (x + \frac{1}{2}a)(x - \frac{1}{2}a)$

- **Rationalmachen eines Nenners mit Wurzeln durch geschicktes Erweitern:**

  Bei einfachen Wurzeln, z. B. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Erweitern mit $\sqrt{3}$)

  Bei Summen oder Differenzen im Nenner: Mit anderem Vorzeichen so erweitern, dass man die Plusminusformel (3. binomische Formel) anwenden kann, z. B.
  $\frac{6}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} = \frac{6 \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{5})}{(\sqrt{8} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{5})} = \frac{6(\sqrt{8} + \sqrt{5})}{\sqrt{8}^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{6(\sqrt{8} + \sqrt{5})}{8 - 5} = 2(\sqrt{8} + \sqrt{5})$

9. Klasse TOP 10 Grundwissen	9
Quadratische Funktionen: Scheitel	**02**

Die **Funktionsgleichung** kann auf verschiedene Arten gegeben sein, z. B.

$y = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $y = a(x + d)^2 + e$ $\qquad$ $y = a(x - n_1)(x - n_2)$

a bestimmt die Form des Funktionsgraphen, n_1, n_2 sind die Nullstellen (siehe unten).

bx nennt man auch lineares Glied, c Konstante.
c ist in der Zeichnung des Graphen der y-Achsenabschnitt
(denn setzt man $x = 0$ ein, so ergibt sich $y = c$, und der Punkt $(0|c)$ ist dann der Schnittpunkt mit der y-Achse).

e bewirkt eine Verschiebung des Graphen nach oben (bzw. bei negativem e nach unten)
(denn in einer Wertetabelle sind dann alle y-Werte um e größer).
d bewirkt eine Verschiebung nach links (bzw. bei negativem d nach rechts)
(denn für x muss um d weniger eingesetzt werden, um den gleichen Funktionswert zu erhalten, der sich ohne d ergäbe).

Die **Graphen** quadratischer Funktionen sind **Parabeln** (→ grund93.pdf); der tiefste bzw. höchste Punkt heißt Scheitel.
Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet (∪), bei $a < 0$ nach unten (∩).
Ist $a = 1$ oder $a = -1$, so kann man sie beim üblichen Koordinatensystem (1 cm für eine Längeneinheit) auch mit der Schablone zeichnen.
Bei $|a| > 1$ ist die Parabel enger (∪), bei $|a| < 1$ weiter (∪).

Bestimmung des Scheitels mit quadratischer Ergänzung

	Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3
	$y = x^2 + 6x + 6$	$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$	$y = -2x^2 + 8x - 3$

1. Schritt: a ausklammern (zum Ausgleich in der Klammer durch a dividieren, in Beispiel 2 also geteilt durch $\frac{1}{2}$, d. h. mal 2):

		$y = \frac{1}{2}[x^2 - 2x + 4]$	$y = -2[x^2 - 4x + \frac{3}{2}]$

2. Schritt: Durch Halbierung des Koeffizienten des linearen Gliedes eine binomische Formel schreiben, Platz lassen für 3. Schritt:

	$y = (x + 3)^2 \ldots + 6$	$y = \frac{1}{2}[(x - 1)^2 \ldots + 4]$	$y = -2[(x-2)^2 \ldots + \frac{3}{2}]$

3. Schritt: Quadriert man die binomische Formel zur Kontrolle aus, so erhält man außer dem gewünschten linearen Glied noch zusätzlich ein Quadrat, das oben nicht dasteht und mit minus wieder ausgeglichen werden muss:

	$y = (x + 3)^2 - 9 + 6$	$y = \frac{1}{2}[(x - 1)^2 - 1 + 4]$	$y = -2[(x-2)^2 - 4 + \frac{3}{2}]$

4. Schritt: Zusammenfassen und äußere Klammer wieder ausmultiplizieren:

	$y = (x + 3)^2 - 3$	$y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{3}{2}$	$y = -2(x - 2)^2 + 5$

5. Schritt: Angabe des Scheitels: Aus den Werten d und e der Funktionsgleichung $y = a(x + d)^2 + e$ erkennt man (siehe oben), dass es sich um eine verschobene Parabel handelt, und zwar um e nach oben und um d nach links, so dass der Scheitel bei $(-d|e)$ liegt:

	$S(-3|-3)$	$S(1|1{,}5)$	$S(2|5)$

Alternative zur quadratischen Ergänzung:
Man bestimmt die **Nullstellen** (Schnittstellen des Graphen mit der x-Achse [→grund81.pdf], sofern solche vorhanden sind), indem man den Funktionsterm gleich 0 setzt: $ax^2+bx+c = 0$; die Lösungsformel ($x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ [→ grund94.pdf]) liefert dann symmetrisch links und rechts von $-\frac{b}{2a}$ liegende Nullstellen, so dass wegen der Achsensymmetrie der Parabel in der Mitte der Nullstellen bei $x = -\frac{b}{2a}$ der Scheitel liegt. Den y-Wert erhält man durch Einsetzen in die Funktionsgleichung. Bei der Nullstellenform $a(x - n_1)(x - n_2) = 0$ ist das Produkt 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also wenn $x_1 = n_1$ oder $x_2 = n_2$ ist.
Beispiel: $y = x^2 - 6x - 16 = (x - 8)(x + 2)$.
Nullstellen (→ grund94.pdf): $x_1 = 8$, $x_2 = -2$. Also ist der Scheitel in der Mitte bei $x = \frac{8+(-2)}{2} = 3$. y-Wert: $x = 3$ einsetzen in $y = x^2 - 6x - 16$ liefert $y = -25$. Also $S(3|-25)$.

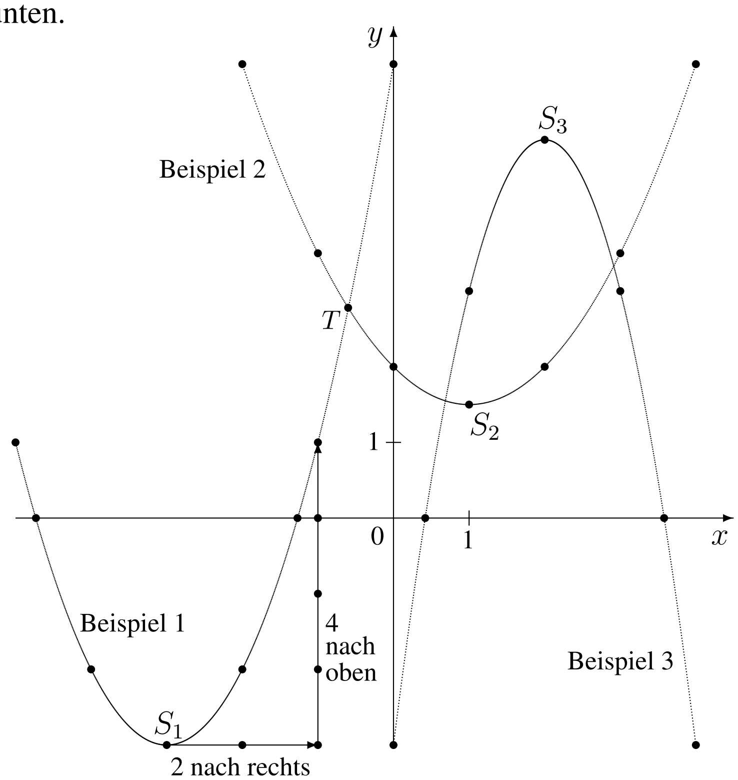
Zur **Zeichnung der Parabel** bestimmt man zunächst den Scheitel, die Nullstellen (falls vorhanden) und den Schnittpunkt mit der y-Achse ($\rightarrow$ grund93.pdf, grund94.pdf, grund81.pdf).

	Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3
	$y = x^2 + 6x + 6$	$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$	$y = -2x^2 + 8x - 3$
Scheitel	$S_1(-3\vert -3)$	$S_2(1\vert 1{,}5)$	$S_3(2\vert 5)$
Nullstellen	$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{3}$	$x_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}}{2\cdot\frac{1}{2}}$	$x_{1/2} = \frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot(-2)\cdot(-3)}}{2\cdot(-2)}$
	$x_1 \approx -1{,}3$, $x_2 \approx -4{,}7$	keine Nullstellen	$x_1 \approx 0{,}4$, $x_2 \approx 3{,}6$
y-Achsenschnitt	$(0\vert 6)$	$(0\vert 2)$	$(0\vert -3)$

Würde die Funktionsgleichung $y = x^2$ lauten, so erhielte man für die x-Werte ± 1, ± 2, ± 3 die Funktionswerte 1, 4, 9.
Für die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ müsste man diese Werte mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren und erhielte $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$; für $y = -2x^2$ entsprechend die Werte -2, -8, -18.

Da die Parabeln der obigen Beispiele durch Verschiebung aus den eben genannten hervorgehen, kann man nun ausgehend vom Scheitel Parabelpunkte finden:
In Beispiel 1 geht man vom Scheitel 1 (bzw. 2 bzw. 3) Einheiten nach links/rechts und 1 (bzw. 4 bzw. 9) Einheiten nach oben (siehe Zeichnung).
In Beispiel 3 geht man vom Scheitel 1 (bzw. 2 bzw. 3) Einheiten nach links/rechts und 2 (bzw. 8 bzw. 18) Einheiten nach unten.

Durch die Punkte legt man dann eine glatte Kurve (insbesondere im Scheitel nicht spitz, sondern rund!):



Schnittpunkte
zweier Funktionsgraphen berechnet man durch Gleichsetzen der Funktionsterme. So ist für den Schnittpunkt von Beispiel 1 und Beispiel 2 zu rechnen: $x^2 + 6x + 6 = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$. Diese Gleichung hat die Lösungen ($\rightarrow$ grund94.pdf) $x_{1/2} = -7 \pm \sqrt{41}$, also $x_1 \approx -0,60$, $x_2 \approx -13,42$.
Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen: $y_{1/2} = 54 \mp 8\sqrt{41}$, also $y_1 \approx 2{,}78$, $y_2 \approx 105{,}22$ (siehe Zeichnung Punkt T).

9. Klasse TOP 10 Grundwissen	**9**
Quadratische Gleichungen	**04**

Erster Schritt
Quadratische Gleichungen löst man meist, indem man **zuerst alles auf eine Seite bringt**, also die Gleichung auf die folgende Form bringt:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sonderfälle mit „fehlendem“ linearen Glied bx (reinquadr. Gleichung) bzw. fehlender Konstante c (x ausklammern!) sowie biquadr. Gleichungen (Substitution!) $\rightarrow$ grund910.pdf.

Lösen allgemeiner quadratischer Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$
Oft „Mitternachtsformel“ (so wichtig, dass man sie auch mitten in der Nacht auswendig wissen muss):

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ist der Wert unter der Wurzel 0, so hat man nur eine Lösung (sog. doppelte Lösung).
Ist der Wert unter der Wurzel negativ, so kennzeichnet man dies als verbotenen Ausdruck; die quadratische Gleichung hat dann keine Lösung.
Beispiel 1: $4x^2 - 14x - 30 = 0$
Man verwendet die Lösungsformel mit $a = 4$, $b = -14$ und $c = -30$:

$$x_{1/2} = \frac{+14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 4 \cdot (-30)}}{2 \cdot 4} = \frac{14 \pm 26}{8}; \quad x_1 = 5; x_2 = -1{,}5$$

Beispiel 2: $x^2 - 6x - 16 = 0$: $x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 10}{2}; \quad x_1 = 8; x_2 = -2$
Beispiel 3: $-\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} = -5x^2 + 62x - 189$
$5x^2 - 63\frac{1}{3}x + 191\frac{2}{3} = 0 \quad | \cdot 3$
$15x^2 - 190x + 575 = 0$; $x_{1/2} = \frac{190 \pm \sqrt{36100 - 4 \cdot 15 \cdot 575}}{2 \cdot 15} = \frac{190 \pm 40}{30}$; $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{23}{3}$.
Beispiel 4: $x^2 + 6x + 6 = 0$: $x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -3 \pm \sqrt{3}$
Beispiel 5: $\frac{1}{2}x^2 - x + 2 = 0$: $x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 2}}{2 \cdot 0{,}5} = 1 \pm \sqrt{-3}$ ↯ Keine Lösung: $L = \{\}$
Beispiel 6: $x^2 + 6x + 6 = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$
$0{,}5x^2 + 7x + 4 = 0$; $x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 4}}{2 \cdot 0{,}5} = -7 \pm \sqrt{41}$

Ist $a = 1$, lautet die Gleichung also $x^2 + bx + c = 0$, spricht man von einer Gleichung in Normalform, für die man die p, q-Formel verwenden kann (ebenso, wenn die Gleichung bequem durch a dividiert werden kann):
p, q**-Formel für die Lösungen von Gleichungen in Normalform** $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(Bezeichnet man p als „das Mittlere“ und q als „das Hintere“, so könnte man für die kleine Formel sagen: „Minus das Mittlere halbe plusminus Wurzel aus das gerade Hingeschriebene im Quadrat minus das Hintere“.)
Beispiel: $x^2 - 3x - \frac{3}{4} = 0$: $x_{1/2} = +1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 + \frac{3}{4}} = 1{,}5 \pm \sqrt{3}$

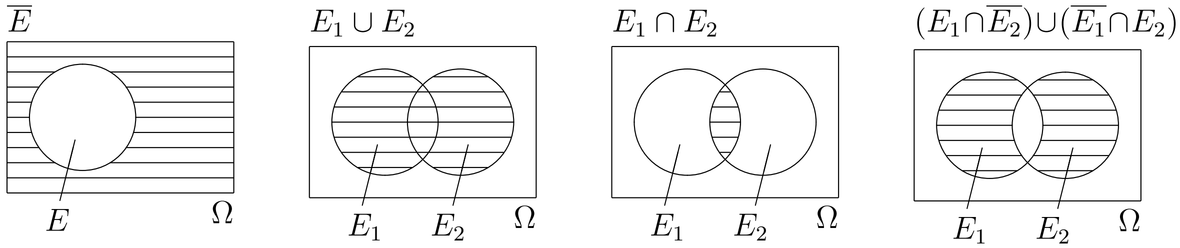
Zahl der Lösungen
Ist man nur an der Anzahl der Lösungen interessiert, betrachtet man nur den Ausdruck unter der Wurzel, die sog. **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$. Ist D positiv, so hat die gegebene quadratische Gleichung zwei Lösungen, ist $D = 0$, so gibt es eine doppelte Lösung, und ist D negativ, so gibt es keine Lösung.
Beispiele:
$-5x^2 + 6x - 80 = 0$: $D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-80) < 0$, also keine Lösung.
$5x^2 - 40x + 80 = 0$: $D = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 80 = 0$, also eine doppelte Lösung, nämlich (mit Formel nachrechnen!) $x_{1/2} = 4$

9. Klasse TOP 10 Grundwissen | 9
Vierfeldertafel, Additionssatz | 05

Grundkenntnisse zu Zufallsexperimenten (Grundraum Ω, Ereignisse E als Teilmengen dieser Grundmenge) $\rightarrow$ grund88.pdf

Verknüpfte Ereignisse
$\overline{E} = \Omega \backslash E$ (alle Ergebnisse ohne E): Gegenereignis, nicht-E (Komplement)
$E_1 \cup E_2$: E_1 oder E_2 (Vereinigungsmenge: mindestens eines der beiden Ereignisse)
$E_1 \cap E_2$: E_1 und E_2 (Schnittmenge: beide Ereignisse treten gleichzeitig ein)
$(E_1 \cap \overline{E_2}) \cup (\overline{E_1} \cap E_2)$: E_1 und nicht E_2, oder E_2 und nicht E_1, d. h. genau eines der beiden Ereignisse („entweder-oder")

Mengendiagramme:



Beispiel: Aus der Menge der Schüler wird einer zufällig ausgewählt und befragt, ob er eine bestimmte Pausenbrotzeit dabei hat. Betrachtet werden die Ereignisse
A: Ausgewählter Schüler hat einen Apfel dabei,
B: Ausgewählter Schüler hat ein belegtes Brot dabei.
$A \cup B$: „Schüler hat Apfel oder Brot oder beides dabei"
$A \cap B$: „Schüler hat beides Apfel und Brot dabei"
$\overline{A} \cap B$: „Schüler hat keinen Apfel, aber ein Brot dabei"

Vierfeldertafel

	E_1	$\overline{E_1}$	
E_2			
$\overline{E_2}$	x		
	y		z

In die Felder werden die Anzahlen (absoluten Häufigkeiten) bzw. die Wahrscheinlichkeiten/relativen Häufigkeiten der jeweiligen Ereignisse eingetragen, in die Ränder rechts und unten die Summen. So steht z. B. im Feld x die Angabe für $E_1 \cap \overline{E_2}$, im Feld y für E_1, im Feld z die Gesamtzahl (bzw. $100\ \% = 1$).

Beispiel: In einer Klasse mit 30 Schülern haben 18 einen Apfel dabei. 30 % haben ein belegtes Brot, $\frac{1}{3}$ davon sogar beides.

Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten:
$30\ \%$ von $30 = 0{,}3 \cdot 30 = 9$, $\frac{1}{3}$ von $9 = 3$;
die unterstrichenen Angaben werden zuerst eingetragen, die restlichen dann so, dass die Spalten- und Zeilensummen passen.

	A	$\overline{A}$	
B	$\underline{3}$	6	$\underline{9}$
$\overline{B}$	15	6	21
	$\underline{18}$	12	$\underline{30}$

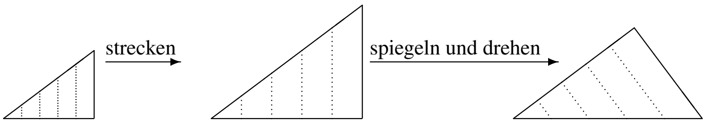
Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten:
$P(A) = \frac{18}{30} = 0{,}6$,
$\frac{1}{3}$ von $0{,}3$ ist $0{,}1$

	A	$\overline{A}$	
B	0,1	0,2	0,3
$\overline{B}$	0,5	0,2	0,7
	0,6	0,4	1

Additionssatz
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(klar: Betrachtet man die Vereinigungsmenge und addiert man die Anzahlen für A und B, so muss man die doppelt gezählten Elemente der Schnittmenge einmal abziehen.)

9. Klasse TOP 10 Grundwissen	9
Ähnlichkeit, Strahlensatz	**06**

Ähnliche Figuren sehen bis auf die Größe gleich aus. Sie haben gleiche Winkel und gleiche Streckenverhältnisse. Bei der Betrachtung geometrischer Skizzen ist es meist hilfreich, sich eine Teilfigur gestreckt („aufgeblasen“) oder gestaucht („geschrumpft“) zu denken und in eine andere Teilfigur hineinzudrehen oder hineinzuspiegeln.



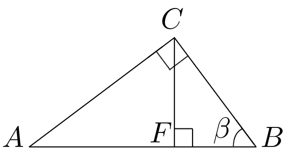
Schreibweise:
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Für die **Ähnlichkeit von Dreiecken** genügt eines der folgenden Merkmale:

- Lauter gleiche Winkel
- Lauter gleiche Streckenverhältnisse
- Ein gemeinsamer Winkel und ein gemeinsames Streckenverhältnis, und zwar das Verhältnis der Seiten, die diesen Winkel einschließen (oder von zwei anderen Seiten, sofern die größere Seite dem Winkel gegenüber liegt).

Beispiele:

- Ein **rechtwinkliges Dreieck** wird durch die Höhe auf der Hypotenuse in zwei Teildreiecke zerlegt. Dann ist jedes der Teildreiecke zum ganzen Dreieck ähnlich:



$\Delta FBC \sim \Delta ABC$
Begründung: Die Dreiecke haben beide einen rechten Winkel und den gemeinsamen Winkel β, sind daher ähnlich.

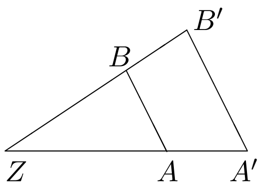
Also stimmen auch die entsprechenden Streckenverhältnisse überein.

Dabei entsprechen die nebenstehenden Seiten einander:	im ΔFBC	im ΔABC	
	$\overline{BC}$	$\overline{AB}$	dem rechten Winkel gegenüber
	$\overline{FC}$	$\overline{AC}$	dem Winkel β gegenüber
	$\overline{FB}$	$\overline{BC}$	an beiden Winkeln anliegend

Also kann man z. B. folgendes Streckenverhältnis bilden: $\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{FB}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}$

Nach kreuzweiser Multiplikation folgt: $|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}| \cdot |\overline{FB}|$.

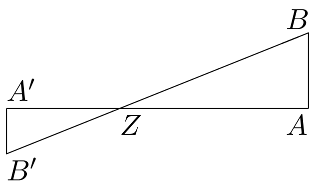
- **Strahlensatz V-Figur**



Ist $AB \| A'B'$, so ist $\Delta ZAB \sim \Delta ZA'B'$, da dann die Dreiecke lauter gleiche Winkel haben.

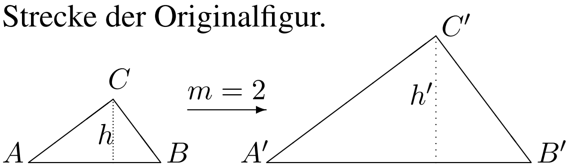
Somit gelten: $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZB'}|}$ und $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{A'B'}|}$

Strahlensatz X-Figur



Streckungsfaktor m

In ählichen Figuren ist jede Strecke der Bildfigur m-mal so lang wie die entsprechende Strecke der Originalfigur.



$|\overline{A'B'}| = m \cdot |\overline{AB}|$ usw.
Bei $m > 1$ erhält man eine Vergrößerung, bei $0 < m < 1$ eine Verkleinerung.

Beachte: Flächeninhalte werden dabei mit dem Faktor m^2 vergrößert:

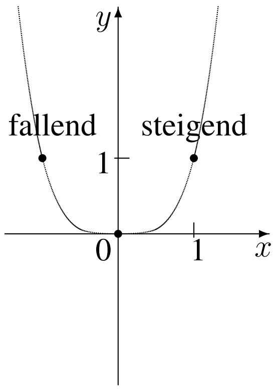
$$A_{\Delta A'B'C'} = \tfrac{1}{2}|\overline{A'B'}| \cdot h' = \tfrac{1}{2}m|\overline{AB}| \cdot mh = m^2 A_{\Delta ABC}$$

9. Klasse TOP 10 Grundwissen | 9
Potenzfunktion, n-te Wurzel | 07

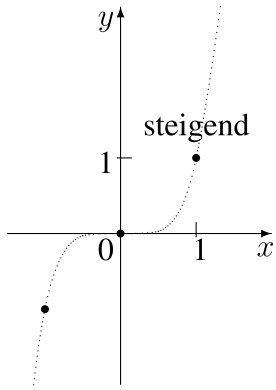
Potenzfunktionen

Funktionen mit dem Term $f(x) = ax^n$, $x \in \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, heißen Potenzfunktionen n-ten Grades.

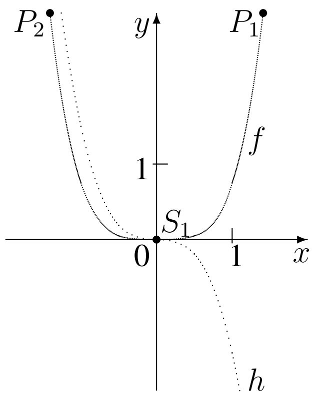
$a = 1$**, gerader Exponent**
Beispiel: $y = x^4$
Achsensymmetrisch, trogförmig „von links oben nach rechts oben“,
durch die Punkte $(-1|1)$, $(0|0)$, $(1|1)$,
Wertemenge $W = [0; \infty[$



$a = 1$**, ungerader Exponent**
Beispiel: $y = x^5$
Punktsymmetrisch, „von links unten nach rechts oben“ mit Terrassenpunkt O,
durch die Punkte $(-1|-1)$, $O(0|0)$, $(1|1)$,
Wertemenge $W = \mathbb{R}$



Streckung mit Faktor a (und Spiegelung für $a < 0$)
Beispiele:
$f(x) = 0{,}75x^4$ (Stauchung der y-Werte auf $\frac{3}{4}$ Höhe),
$h(x) = -1{,}5x^3$ (Streckung der y-Werte auf 1,5-fachen Betrag und Spiegelung an der x-Achse)



Beispielaufgabe: Schnittpunkte der obigen Graphen mit $f(x) = 0{,}75x^4$ und $h(x) = -1{,}5x^3$:
Gleichsetzen: $0{,}75x^4 = -1{,}5x^3$;
alles auf eine Seite bringen, $0{,}75x^3$ ausklammern: $0{,}75x^4 + 1{,}5x^3 = 0$; $0{,}75x^3(x + 2) = 0$;
dieses Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also wenn $x^3 = 0$ oder $x + 2 = 0$;
Lösungen der Gleichung somit: $x = 0$ und $x = -2$.
y-Werte der Schnittpunkte durch Einsetzen in einen der Funktionsterme ergibt Schnittpunkte $S_1(0|0)$, $S_2(-2|12)$ (oben nicht mehr im Bild).

n-te Wurzeln

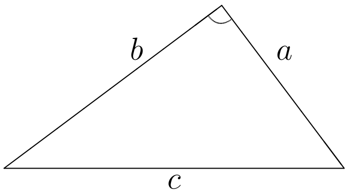
$\sqrt[n]{a}$ ist für $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$, also z. B. $\sqrt[3]{1000} = 10$, denn $10^3 = 1000$.

Beispiel: Punkt $P(?|3)$ auf dem Graphen zur obigen Funktion mit $f(x) = 0{,}75x^4$ mit $y = 3$:
$f(x) = 3$, also $0{,}75x^4 = 3$, also $x^4 = 2$. Somit $x = \pm\sqrt[4]{2} \approx \pm 1{,}19$ (zwei x-Werte möglich!)

Schreibweise mit Potenzen:
$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ (Brüche im Exponenten sagen: „Ich bin eine Wurzel“)
$x^{\frac{3}{2}} = (x^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = x\sqrt{x}$
oder $x^{\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^3 = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ oder $x^{\frac{3}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$
Damit gelten weiterhin die bekannten Rechenregeln ($\rightarrow$ grund84.pdf), wodurch sich Wurzeln oft bequemer als Potenzen weiterverarbeiten lassen.

Beispiel: $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}}{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^0 = 1$

9. Klasse TOP 10 Grundwissen — 9
Pythagoras — 08



Satz von Pythagoras:
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber).

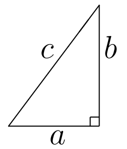
Wichtige Anwendungen:

- **Auflösen der Formel** $a^2 + b^2 = c^2$ nach c bzw. a:

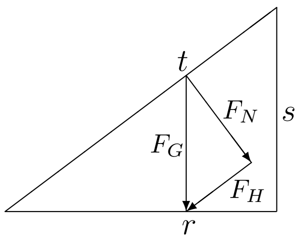
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

(Diese Ausdrücke können nicht weiter vereinfacht werden und sind insbesondere **nicht** gleich $a + b$ bzw. $c - b$)

- Die rechtwinkligen Dreiecke in **verschiedenen Lagen** erkennen:
Dreht man obiges Dreieck, so erkennt man leicht neben $A = \frac{1}{2}ch_c$ eine weitere Formel für die **Fläche** des Dreiecks: $A = \frac{1}{2}ab$

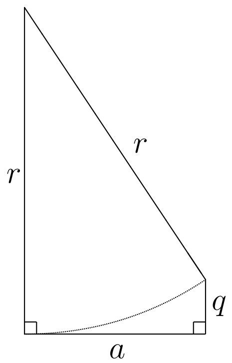


- **Anwendung in der Physik:**

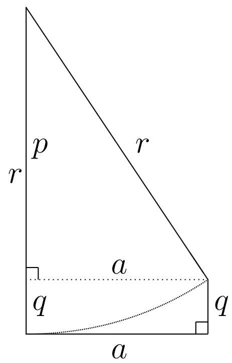


In der nebenstehenden Abbildung sind $r \perp s$, $F_H \| t$, $F_N \perp t$ und $F_G \perp r$.
Im großen äußeren Dreieck gilt $r^2 + s^2 = t^2$.
Im kleinen inneren Dreieck ist $F_N \perp F_H$ und daher $F_G^2 = F_N^2 + F_H^2$.

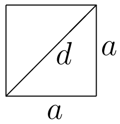
- Durch Einzeichnen von **Hilfslinien** rechtwinklige Dreiecke erzeugen:



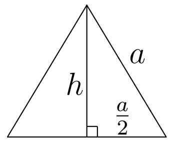
Beispiel (Abbildung links):
Gegeben sind der Kreisradius $r = 5{,}3$ m und der Abstand $a = 2{,}8$ m. Gesucht ist q.
Lösung (Abbildung rechts):
Man zeichnet die punktierte Hilfslinie der Länge a ein und erhält damit ein rechtwinkliges Dreieck mit $p^2 + a^2 = r^2$, also $p = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{(5{,}3\text{ m})^2 - (2{,}8\text{ m})^2} = 4{,}5$ m.
Damit ist $q = r - p = 0{,}8$ m.



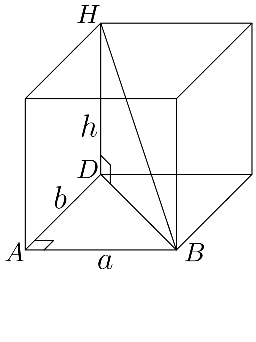
- **Diagonale im Quadrat**
$d^2 = a^2 + a^2$
$\Rightarrow \quad d = \sqrt{2}a$



- **Höhe im gleichseitigen Dreieck**
$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$
$\Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$



- **Raumdiagonale im Quader**
Betrachte zunächst ΔABD: Dort ist $|\overline{DB}|^2 = a^2 + b^2$.
Betrachte dann ΔHDB: Dort ist $|\overline{HB}|^2 = |\overline{DB}|^2 + h^2$.
Also ist $|\overline{HB}|^2 = a^2 + b^2 + h^2$.

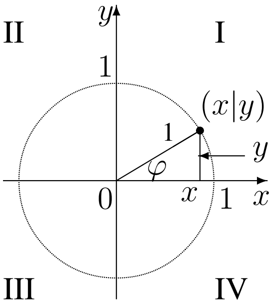


- **Abstand der Punkte** $P_1(x_1|y_1)$ **und** $P_2(x_2|y_2)$**:**
$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

9. Klasse TOP 10 Grundwissen — 9

Trigonometrie — 09

Sinus, Kosinus am Einheitskreis (= Kreis mit Radius $r = 1$)



$\cos\varphi = x$, $\sin\varphi = y$

Insbesondere ergibt sich also z. B.

- für $\varphi = 30°$ ein „halbes“ gleichseitiges Dreieck mit $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2}$,
- für $\varphi = 45°$ ein gleichschenkliges Dreieck („halbes Quadrat“) mit $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

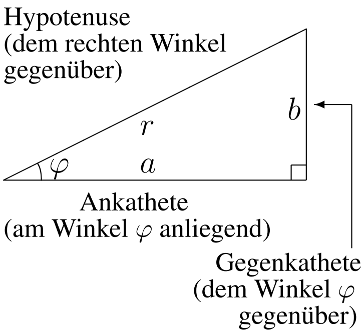
Beispiel:
Für den Punkt mit $r = 1$, $\varphi = 60°$ („Polarkoordinaten“) erhält man $x = \cos 60° = \frac{1}{2} = 0{,}5$, $y = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ („kartesische Koordinaten“)

Tangens, Kotangens
$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, $\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\tan\varphi}$

Trigonometrischer Pythagoras
Wegen $x^2 + y^2 = 1$ ist $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$, Kurzschreibweise: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Weitere Formeln (z. B. $\sin(90° - \varphi) = \cos(\varphi)$, Additionstheoreme) $\rightarrow$ Formelsammlungen.

sin, cos, tan am rechtwinkligen Dreieck

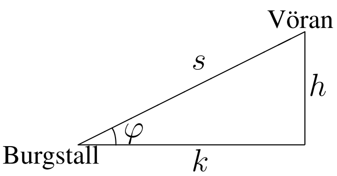


Denkt man sich das nebenstehende Dreieck mit dem Faktor $\frac{1}{r}$ gestreckt (bzw. gestaucht), so erhält man eines mit Hypotenuse 1, Ankathete $\frac{a}{r}$ und Gegenkathete $\frac{b}{r}$ und kann obige Erklärung von sin und cos am Einheitskreis anwenden:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{b}{r}}{\frac{a}{r}} = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Beispiel: Seilbahn Burgstall (270 m) – Vöran (1200 m), horizontale Entfernung 3,7 cm auf der Karte im Maßstab 1:50 000, Annahme eines geradlinig verlaufenden Seils s.



$= 0{,}037\text{ m} \cdot 50\,000 = 1850\text{ m}$

$h = 1200\text{ m} - 270\text{ m} = 930\text{ m}$, k siehe Skizze links.
Hier ist k die Ankathete von φ, h die Gegenkathete.
$\tan\varphi = \frac{h}{k} = \frac{930}{1850} \approx 0{,}503$.
Je nach Taschenrechner [TR] ermittelt man meist mit den Tasten (SHIFT) $\tan^{-1}$ vor oder nach Eingabe des Wertes 0,503 den Winkel:
$\varphi \approx 26{,}7°$.

(TR auf DEGREE, siehe TR-Bedienungsanleitung, oft z. B. mit Tasten SHIFT-SETUP 3 oder MODE 4 oder durch wiederholtes Drücken einer DRG-Taste; im TR-Display wird dies meist durch DEG angezeigt [oder D oder nichts, aber **nicht** RAD oder GRAD!])

s mit Pythagoras oder z. B. $\sin\varphi = \frac{h}{s}$, also $s \cdot \sin\varphi = h$, also $s = \frac{h}{\sin\varphi} = \frac{930\text{ m}}{\sin 26{,}7°} \approx 2{,}1$ km.

Dreiecksberechnungen im allgemeinen Dreieck
Je nach gegebenen Größen wählt man einen der folgenden Sätze:

Sinussatz:

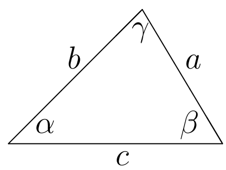
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

(Die Seitenlängen verhalten sich wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel)

Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

(„verallgemeinerter Pythagoras“)



9. Klasse TOP 10 Grundwissen 9
Lösen von Gleichungen 10

Allgemein: Klammern auflösen, wenn sinnvoll (z. B. nicht sinnvoll, wenn im Nenner eines Bruchs bereits ein Produkt steht oder wenn ein Produkt gleich Null ist).
Gleichartige Terme zusammenfassen (z. B. x bzw. x^2 ausklammern).

Typ	Name	Lösungsverfahren	Beispiel
$x+2=3x-3$	Lineare Gleichung	x-Glieder auf eine Seite, Rest auf die andere	$2+3=3x-x$ $5=2x$; $x=\frac{5}{2}$; $L=\{\frac{5}{2}\}$
$0=0$	Allgemeingültig	Alle erlaubten x sind Lösung	$L=D$ bzw. $L=\mathbb{R}$
$0=1$	Unerfüllbar	Keine Lösung	$L=\{\}$
$x^2-6x-16=0$	Quadratische Gleichung in Normalform	p,q-Formel $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$ (oder allg. Formel mit $a=1$)	$x_{1/2}=3\pm\sqrt{9+16}$ $x_1=-2$; $x_2=8$ $L=\{-2;8\}$
$4x^2+4x+1=$ $=5x+34$	Allgemeine quadratische Gleichung	Nach 0 auflösen; Mitternachtsformel $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$4x^2-x-33=0$ $x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot4\cdot33}}{2\cdot4}=\frac{1\pm23}{8}$ $x_1=3$; $x_2=-\frac{11}{4}$ $L=\{-\frac{11}{4};3\}$
$4x^2-2=7$	Rein-quadratische Gleichung	Nach x^2 auflösen. Keine, eine oder zwei Lösungen!	$x^2=\frac{9}{4}$ $x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$ $L=\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\}$
$x^2-7x=0$	Qu. Gl. ohne Konstante (nur wenn rechte Seite $=0$ ist!)	x ausklammern; ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist	$x(x-7)=0$ $x=0$ oder $x-7=0$ $x_1=0$, $x_2=7$ $L=\{0;7\}$
$x^4-6x^2-16=0$	Biquadr. Gleichung (nicht verpflichtend im Lehrplan)	Substitution $u=x^2$	$u^2-6u-16=0$ $u_1=-2$, $u_2=8$ $x_{1/2}$ ↯, $x_{3/4}=\pm\sqrt{8}$ $L=\{-\sqrt{8};\sqrt{8}\}$
$x^4=5$	Reine Potenzgleichung	Umkehroperation hoch 4 $\leftrightarrow$ hoch $\frac{1}{4}$	$x=\pm5^{\frac{1}{4}}=\pm\sqrt[4]{5}$ $L=\{-\sqrt[4]{5};\sqrt[4]{5}\}$
$\dfrac{x}{x-1}-1=\dfrac{3}{x+2}$	Allgemeine Bruchgleichung	Nenner faktorisieren; mit Hauptnenner multiplizieren; Definitionsmenge!	$D=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ $HN=(x-1)(x+2)$ $x(x+2)-(x-1)(x+2)$ $=3(x-1)$ $x^2+2x-x^2-2x+x+2=$ $=3x-3$ $x=\frac{5}{2}$ $L=\{\frac{5}{2}\}$.
$\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{2}{x+1}$	Bes. Bruchgl.: li. und re. Seite nur ein Bruch	Kreuzweise multiplizieren. Definitionsmenge!	$D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ $3(x+1)=2(x-1)$ $x=-5$ $L=\{-5\}$
$\sqrt{5x+34}-2x=1$	Wurzelgleichung (nicht verpflichtend im Lehrplan)	Definitionsmenge! Wurzel isolieren; quadrieren; Probe!	$D=[-\frac{34}{5};\infty[$ $\sqrt{5x+34}=2x+1$ $5x+34=4x^2+4x+1$ $x_1=3$ ($\surd$), $x_2=-\frac{11}{4}$ (↯) $L=\{3\}$
$\sin\varphi=0{,}6$	Trigonometr. Gleichung	Taschenrechner (SHIFT) $\sin^{-1}$	$\varphi\approx36{,}87°$ Näheres $\rightarrow$ 10. Klasse!

9. Klasse TOP 10 Grundwissen — 09

Kernsätze — K

Blatt auf DIN A 3 vergrößern, Karteikarten ausschneiden und Rückseite an Rückseite zusammenkleben!

Wurzeln, binomische Formeln 91

- Definitionsbereich, z. B. $\sqrt{x-3}$
- Bedeutung: Warum ist $\sqrt{2}$ nicht genau 1,4?
- Rechenregeln, z. B. $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^7}$, $\sqrt{k^4+k^2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{18}=\ldots$
- $a^2+2ab+b^2=\ldots$; $a^2-b^2=\ldots$

L91

- Radikand ≥ 0, hier also $x\geq 3$
- $\sqrt{2}$ ist diejenige Zahl, deren Quadrat 2 ist; es ist aber $1{,}4^2=1{,}96$
- $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^7}=\sqrt{x\cdot x^7}=\sqrt{x^8}=x^4$, $\sqrt{k^2(k^2+1)}=|k|\sqrt{k^2+1}$, $\ldots=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+3\sqrt{2}=3{,}5\sqrt{2}$
- $\ldots=(a+b)^2$; $\ldots=(a+b)(a-b)$

Quadr. Funktionen: Scheitel 92

Wie erkennt man an
$y=a(x+d)^2+e$
Lage und Form der Parabel?
Wie geht die quadratische Ergänzung, z. B.
$y=x^2-14x+41$?

L92

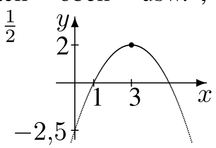
Im Vergleich zu $y=x^2$ ist $y=a(x+d)^2+e$ um d nach links und um e nach oben verschoben.
$a<0$: Nach unten geöffnet. a betragsmäßig klein: Weite Parabel.
$x^2\underbrace{-14x}_{\text{halb}}+41=(x\underbrace{-7)^2-49}_{\text{Quadrat}}+41$

Quadr. Funktionen: Zeichnung 93

Wie zeichnet man z. B. die Parabel $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$?

L93

Vom Scheitel aus bei der Normalparabel ($a=1$) „3 zur Seite, 9 nach oben usw.“, also bei $a=-\frac{1}{2}$ „3 zur Seite, 4,5 nach unten usw.“.



Quadratische Gleichungen 94

Welcher Schritt wird bei quadr. Gleichungen zuerst gemacht, z. B. $x^2+3x=10$?
Wie lautet die Lösungsformel für die Gleichung $ax^2+bx+c=0$?
Was besagt die Diskriminante?

L94

Zuerst alles auf eine Seite bringen.
Mitternachtsformel:
$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Diskriminante b^2-4ac: Wenn positiv, dann gibt es zwei Lösungen, wenn 0, dann eine, wenn negativ, dann keine.

Vierfeldertafel, Additionssatz 95

Wie legt man eine Vierfeldertafel an, wenn zwei Eigenschaften/Ereignisse A, B betrachtet werden?
Additionssatz: $P(A\cup B)=\ldots$

L95

Zeilen- und Spaltenbeschriftung mit A, nicht-A, am Rand Zeilen- und Spaltensummen ergänzen:

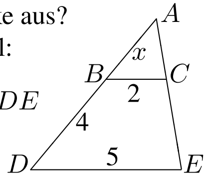
	A	$\overline{A}$	
B			
$\overline{B}$			
			100 %

$\ldots=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Ähnlichkeit, Strahlensatz 96

Wodurch zeichnen sich ähnliche Dreiecke aus?
Beispiel:

$BC\parallel DE$



L96

Gleiche Winkel.
Gleiche Verhältnisse entsprechender Seiten.
Beispiel: $\Delta ABC\sim\Delta ADE$
$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$
$\frac{x}{2}=\frac{x+4}{5}$;
$5x=2(x+4)$; $x=\frac{8}{3}$

Potenzfunktion, n-te Wurzel 97

Was kann über den prinzipiellen Verlauf von Potenzfunktionen mit $f(x)=x^n$ gesagt werden?
Potenzschreibweise: $a^{\frac{1}{n}}=\ldots$

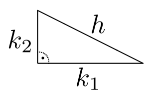
L97

Gerader Exponent bei $y=x^n$: Von links oben nach rechts oben, trogförmig.
Ungerader Exponent $n\geq 3$: Von links unten nach rechts oben mit Terrassenpunkt $(0|0)$
$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

Pythagoras 98

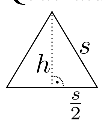
Wie berechnet man Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck?
Wie lang ist die Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge a?
Höhe im gleichseitigen Dreieck: Wie lautet der Pythagoras-Ansatz?

L98



$k_1^2+k_2^2=h^2$

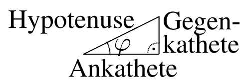
Quadratdiagonale $d=\sqrt{2}a$



$h^2+(\frac{s}{2})^2=s^2$

Trigonometrie 99

Formuliere mit Ankathete usw.:
$\sin\varphi=\frac{\ldots}{\ldots}$
$\cos\varphi=\frac{\ldots}{\ldots}$
$\tan\varphi=\frac{\ldots}{\ldots}$



Formuliere Beziehungen zwischen sin, cos, tan.

L99

$\sin\varphi=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
$\cos\varphi=\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
$\tan\varphi=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
$\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$
$(\sin\varphi)^2+(\cos\varphi)^2=1$

Lösen von Gleichungen 910

Wie lauten die Lösungsrezepte:
(1) $28x+7=0$
(2) $28x^2=7$
(3) $28x^2-7x=0$
(4) $28x^2-7x+1=0$
(5) $\frac{1}{x}=\frac{28}{7-x}$

L910

(1) Alle x auf eine Seite. $x=-\frac{1}{4}$
(2) Hier 2 Lsgen. $x=\pm\sqrt{\frac{7}{28}}=\pm\frac{1}{2}$
(3) Ausklammern. $x(28x-7)=0$; $x_1=0$; $x_2=\frac{1}{4}$
(4) Mitternachtsformel. Hier $L=\{\}$
(5) Bruchgl.: Mit Nenner multiplizieren. $7-x=28x$; $x=\frac{7}{29}$

9. Klasse Übungsaufgaben	**9**
Wurzeln, binomische Formeln	**01**

1. Gib den Definitionsbereich an!
   (a) $\sqrt{x-36}$
   (b) $\frac{1}{\sqrt{x+36}}$
   (c) $\sqrt{x^2-12x+36}$

2. Vereinfache:
   (a) $\sqrt{500}+3\sqrt{98}-5\sqrt{8}-3\sqrt{45}$
   (b) $\sqrt{64k^2}$
   (c) $\left(\sqrt{\frac{x^5y}{5a}}:\sqrt{\frac{x^3y^3}{a^2}}\right)\cdot\sqrt{\frac{25x}{a}} \qquad (x,y,z>0)$

3. Mache den Nenner rational:
   (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$

4. Zahlen wie $\sqrt{2}$ sind keine Brüche (also nicht in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$); sie sind in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen enthalten. So ist $\sqrt{2}$ auch nur ungefähr gleich $1{,}41$.
   Begründe mit dem Taschenrechner ohne Benutzung der $\sqrt{\ }$-Taste, warum $1{,}41$ nicht genau $\sqrt{2}$ ist und finde die dritte der unendlich vielen Dezimalen von $\sqrt{2}$.

5. Binomische Formeln (weitere Übungen zu binomischen Formeln siehe ueb73.pdf):
   (a) Löse die Klammern auf:
      i. $(mn-p)(p+mn)$
      ii. $(-r-s)^2$
   (b) Faktorisiere; klammere hierbei zuerst, falls möglich, gemeinsame Faktoren aus:
      i. $11x^2-66x+99$
      ii. $9x^2-121$
      iii. $81x^4-1$
      iv. $3x^2+39x+507$
   (c) Ergänze:
      i. $x^2-10x+\ldots=(\ldots\ldots\ldots)^2$
      ii. $\frac{1}{100}x^2+x+\ldots=(\ldots\ldots\ldots)^2$

6. Vermeide häufige Fehler:
   (a) „$(a+b)^3=a^3+b^3$." FALSCH! Verbessere!
   (b) „Wenn ich a^5 von a^7 wegnehme, bleibt a^2, also $\dfrac{a^7-a^5}{a^3-a^2}=\dfrac{a^2}{a}=a$." FALSCH! Verbessere!

9. Klasse Übungsaufgaben	9
Quadratische Funktionen: Scheitel	**02**

1. Bestimme den Scheitel:
   (a) $y = x^2 - 3x - \frac{3}{4}$ (mit quadratischer Ergänzung)
   (b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 11$ (mit quadratischer Ergänzung)
   (c) $y = \frac{1}{2}(x + 12)(x - 4)$ (mit Hilfe der Nullstellen)

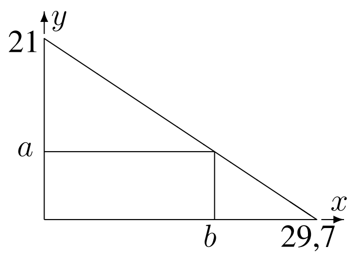
2. Gib die Gleichung einer nach unten geöffneten Standardparabel mit Scheitel $(5|2)$ an.

3. Erkläre, wodurch sich die Parabeln $y = 3x^2 - 18x + 27$ und $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ unterscheiden.

4. Bestimme den Scheitel der Parabel, die durch die Punkte $A(-1|-38)$, $B(1|-18)$ und $C(3|-6)$ geht.
   Anleitung: Setze in den Ansatz $y = ax^2 + bx + c$ den x- und y-Wert jeweils eines Punktes ein und gewinne so ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen für die Variablen a, b, c. Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen siehe grund89.pdf und ueb89.pdf, Aufgabe 3.

5. In dieser Aufgabe wird der Funktionsterm einer quadratischen Funktion aufgestellt für die Summe aller natürlichen Zahlen bis zur Zahl x.
   (a) Betrachte zunächst die Summe $s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 11 + 12$.
   Studiere folgenden Trick zur Berechnung von s:
   $$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + \ldots + 12 \\ \underline{s} &\underline{= 12 + 11 + \ldots + 1} \\ 2s &= 13 + 13 + \ldots + 13 \quad = \quad 12 \cdot 13, \text{ also } s = 78 \end{aligned}$$
   Verwende denselben Trick, um $1 + 2 + \ldots + 98 + 99$ zu bestimmen.
   (b) Begründe ebenso: $1 + 2 + \ldots + x = \frac{x(x+1)}{2}$
   (c) Bestimme den Scheitel zur Funktionsgleichung $y = \frac{x(x+1)}{2}$

6. Aus einem diagonal halbierten DIN A 4-Blatt soll entsprechend nebenstehender Zeichnung ein möglichst großflächiges Rechteck geschnitten werden.



   Hinweis: Gehe in folgenden Schritten vor:
   - Schreibe für die **G**röße, die maximiert werden soll, eine einfache Formel.
   - Die Maße a und b des Rechtecks sind durch eine sog. **N**ebenbedingung verknüpft (denn je größer a, desto kleiner ist b). Mache dir klar, dass gilt: $a = -\frac{21}{29{,}7}b + 21$
   - **A**uflösen dieser Gleichung nach einer Variablen (hier bereits der Fall).
   - Durch Einsetzen in die anfängliche Formel erhält man eine **D**arstellung mit nur einer Variablen in Form einer quadratischen Funktionsgleichung. Führe eine Umbenennung durch (x statt b).
   - Durch Suche des Scheitels findet man das **E**xtremum, d. h. die Länge b, für die die Fläche extremal (hier: maximal) wird.

9. Klasse Übungsaufgaben	**9**
Quadratische Funktionen: Zeichnung	**03**

(Zum Lösen der bei Nullstellen und Schnittproblemen entstehenden Gleichungen siehe auch grund94.pdf, für die Scheitelbestimmung ueb92.pdf).

1. Zeichne folgende Parabeln:

   I $y = x^2 - 3x - \frac{3}{4}$

   II $y = \frac{1}{2}x(x+1)$

   III $y = -x^2 - 4x - 5$

2. Bestimme die gemeinsamen Punkte:

   (a) Für die Parabeln I und III aus Aufgabe 1.

   (b) Für die Parabel II aus Aufgabe 1 und $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 24$.

3. Man gebe die Funktionsgleichung der Parabel an, die durch Spiegelung der Parabel $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 11$ am Ursprung des Koordinatensystems entsteht.

4. Zeichne folgende Parabeln:

   I $y = 3x^2 - 18x + 27$

   II $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

   III $y = -5x^2 + 62x - 189$

5. Bestimme die gemeinsamen Punkte der Parabeln II und III aus Aufgabe 4. Interpretiere das Ergebnis.

6. Zeichne in das Koordinatensystem aus Aufgabe 4 die Gerade $g : y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ und berechne die x-Werte der gemeinsamen Punkte

   (a) der Geraden und der Parabel II aus Aufgabe 4,

   (b) der Geraden und der Parabel III aus Aufgabe 4.

9. Klasse Übungsaufgaben	9
Quadratische Gleichungen	**04**

1. Löse folgende quadratische Gleichungen:

   (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

   (b) $x^2 - 6x = 27$

   (c) $x^2 - x + 0{,}3 = 0$

   (d) $x^2 + 4x = 7$

   (e) $x^2 + 12x + 36 = 0$

   (f) $3x^2 - 11{,}7x + 4{,}2 = 0$

   (g) $60x^2 + 57x = 18$

   (h) $-x^2 + 66x - 1089 = 0$

   (i) $-0{,}5x^2 + 7 = 2x$

   (j) $2x^2 - kx - k^2 = 0$

2. Bestimme nur die Zahl der Lösungen:

   (a) $8(x-7)(x-1) = 15$

   (b) $-(x-7)(x-1) = 15$

   (c) $(x-7)^2 - (x-1)^2 = 15$

   (d) $3(x-10)^2 + 90^2 = (x-23)(x-137) + 3999$

3. Bei welcher der folgenden Gleichungen sollte man ausmultiplizieren, bei welcher nicht?

   (a) $(x-7)(x-17) = 200$

   (b) $(x-7)(x-17) = 0$

   (c) $(x-1)^2 = -4x$

   (d) $(x-1)^2 = -4$

4. Finde zwei Zahlen, deren Summe 10 ist und deren Produkt 11 ist.

5. Welcher Fehler wurde hier gemacht?

$$\begin{aligned} x^2 &= 49x \quad | : x \\ x &= 49 \end{aligned}$$

FALSCH!

6. Schreibe $3x^2 + 30x + 72$ als Produkt!

   Hinweise:

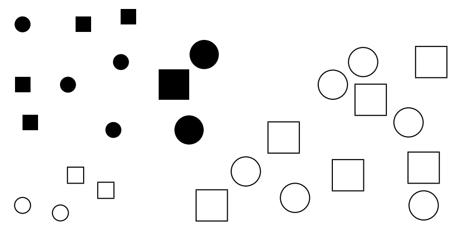
   Gelingt es, eine in Normalform gegebene quadratische Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ auf die Form $(x-r)(x-s) = 0$ zu bringen, so sind $x_1 = r$ und $x_2 = s$ die Lösungen der Gleichung (denn ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist).

   Umgekehrt kann man damit **Faktorisieren**: Hat man für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ z. B. mit der Formel die Lösungen $x_1 = r$ und $x_2 = s$ gefunden, so ist $ax^2 + bx + c = a(x-r)(x-s)$ („x minus Lösung“).

   Beispiel: $5x^2 + 25x - 120 = 0$ liefert $x_1 = 3$, $x_2 = -8$; damit kann man schreiben $5x^2 + 25x - 120 =$ $= 5(x-3)(x-(-8)) = 5(x-3)(x+8)$.

9. Klasse Übungsaufgaben	9
Vierfeldertafel, Additionssatz	**05**

1. Markiere durch Umranden:
   A: „Ausgefüllte Figuren“
   B: „Große Figuren“
   $\overline{A} \cap B$: ...
   Ergänze die fehlenden Beschreibungen für $\overline{A} \cap B$ und $\overline{A} \cup \overline{B}$: ...



2. Eine Umfrage hatte folgende Ergebnisse:
   21 % der Befragten sind jünger als 30 Jahre.
   16 % der Befragten finden, dass ein guter Lehrer auf jeden Fall streng sein soll.
   2 % der Befragten sind jünger als 30 Jahre und finden, dass ein guter Lehrer auf jeden Fall streng sein soll.

   Bestimme mit diesen Daten mit Hilfe einer Vierfeldertafel die folgenden Wahrscheinlichkeiten, ...

   - ... dass eine befragte Person mindestens 30 Jahre alt ist und findet, dass ein guter Lehrer auf jeden Fall streng sein soll,
   - ... dass eine befragte Person mindestens 30 Jahre alt ist oder findet, dass Strenge nicht unbedingt Kennzeichen eines guten Lehrers sein muss.

3. Erstelle eine 4-Felder-Tafel mit relativen Häufigkeiten:

   Die Schultaschen von 24 Schülern erscheint zu schwer; sie werden nach unnötigem Ballast untersucht; tatsächlich wird bei allen ein an diesem Schultag nicht benötigtes Buch und/oder ein nicht erlaubtes Spielzeug gefunden. 7 haben beides dabei, außerdem 6 zwar kein Spielzeug, aber das unnötige Buch.

4. Ein Blumenhändler hat Rosen mit folgenden Eigenschaften im Verkaufsraum:

Blütenfarbe / Blütentyp	gelb G	rot R	weiß W
einfach E	5 %	35 %	15 %
doppelt $\overline{E}$	10 %	15 %	?

   Herr S. besorgt durch zufällige Wahl eine Blume für seine Frau. Diese mag nicht gelb und würde beim doppelten Blütentyp nur die Farbe weiß bevorzugen.

   Formuliere mit den gegebenen Bezeichnungen und den Zeichen $\cup$ und $\cap$ das Ereignis „Herr S. hat eine passende Blume gewählt“ und die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

5. Eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 80 wird ausgewählt.

   Bestimme mit dem Additionssatz, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Zahl die Ziffer 3 enthält oder durch 3 teilbar ist.

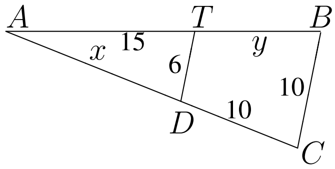
6. Von den x Knaben in einer 25er-Klasse würde $\frac{1}{4}$ gerne ein eigenes Pferd haben. In der Klasse gibt es 9 Mädchen, die diesen Wunsch nicht haben.

   Ermittle, wie groß x höchstens sein kann.

9. Klasse Übungsaufgaben	9
Ähnlichkeit, Strahlensatz	**06**

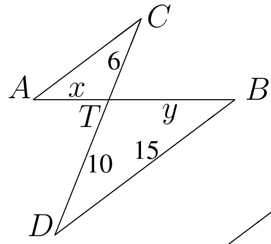
1. Bestimme jeweils x und y; gib an, in welchem Verhältnis T die Strecke $\overline{AB}$ teilt.

   (a) $DT \| CB$

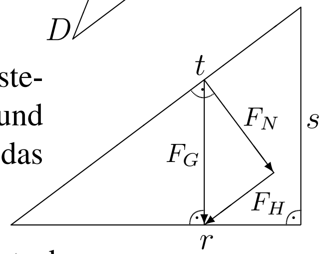
   

   (b) $|\overline{AB}| = 15$

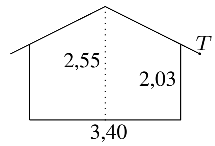
   $AC \| DB$

2. In der Physik werden manchmal Skizzen wie die nebenstehende betrachtet (mit $F_H \| t$). Warum sind das von r, s, t und das von F_N, F_H, F_G gebildete Dreieck ähnlich? Ergänze das Streckenverhältnis: $\frac{F_H}{F_G} = \frac{\dots}{\dots}$.

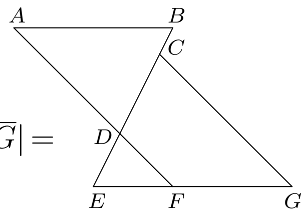
3. Beim nebenstehenden Gartenhaus (Maße in m) beträgt der Dachüberstand 0,10 m, so dass die bedachte Länge 3,60 m beträgt. Berechne, in welcher Höhe über dem Boden sich dann die Dachrinne T befindet.

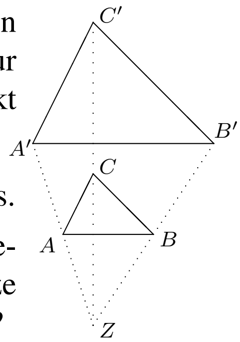
4. (a) Stelle die Formeln in den Strahlensätzen aus grund96.pdf so um, dass das Verhältnis der Streckenstücke, die auf einer Geraden liegen, auf der einen Gleichungsseite steht: $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA'}|} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

   (b) Forme weiter um: $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

   (c) In nebenstehender Skizze ist $|\overline{AB}| = 12$, $|\overline{EF}| = 6$, $|\overline{FG}| = 9$, $|\overline{CG}| = 14$, $AB \| EG$ und $AF \| CG$. Berechne $|\overline{AD}|$.

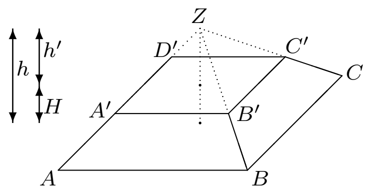
5. Bei zentrischen Streckungen gibt es ein Streckungszentrum Z, von dem aus eine Figur (z. B. das Dreieck ΔABC) zur Bildfigur ($\Delta A'B'C'$) gestreckt wird. Z liegt auf den Geraden Punkt–Bildpunkt (also AA', BB', CC').

   (a) Drücke den Streckungsfaktor m auf verschiedene Weisen aus.

   (b) Es gibt auch zentrische Streckungen mit $m < 0$. A und A' liegen dann auf verschiedenen Seiten von Z. Fertige eine Skizze für $m = -\frac{1}{2}$ an. Welcher Spezialfall ergibt sich für $m = -1$?

6. Einen Pyramidenstumpf kann man sich denken als eine große Pyramide, der man eine zentrisch verkleinerte Pyramide weggenommen hat.

   (a) Gegeben sind $|\overline{AB}| = 5$, $|\overline{A'B'}| = 3$ und die Pyramidenstumpf-Höhe $H = 1$. Bestimme den Streckungsfaktor m und die Höhe h der Gesamtpyramide.

   (b) Vergleiche mit der Pyramiden-Volumen-Formel $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3}Gh$ (Grundfläche G, Höhe h) die Volumina der ganzen und der oberen kleinen Pyramide.

9. Klasse Übungsaufgaben	9
Potenzfunktion, n-te Wurzel	**07**

1. Gegeben sind die Potenzfunktionen zu $f(x) = 3x^6$ und $h(x) = -1{,}2x^3$.

   Beschreibe den Verlauf der Funktionsgraphen und berechne die Schnittpunkte.

2. Gib, sofern möglich, die Gleichung $y = ax^n$ einer Potenzfunktion an, die durch die Punkte P und Q verläuft:

   (a) $P(-5|100)$, $Q(2|2{,}56)$
   (b) $P(-1|-1)$, $Q(0|1)$
   (c) $P(-3|486)$, $Q(2|-64)$

3. Bestimme die Lösungsmenge:

   (a) $1000x^3 - 27 = 0$ (ohne Taschenrechner)
   (b) $3{,}2x^4 = 18{,}4$ (mit Taschenrechner auf 3 Dezimalen gerundet)

4. Ein Internet-Händler hatte zunächst zur Markteinführung für das angebotene Produkt einen sehr günstigen Preis geboten und dann schrittweise die Preise erhöht, und zwar voriges Jahr um 25 % und dieses Jahr den Vorjahrespreis nochmals um 15,2 %. Der arithmetische Mittelwert der Zahlen 25 und 15,2 ist $\frac{25+15{,}2}{2} = 20{,}1$.

   Paradoxerweise (d. h. entgegen dem ersten Anschein) ist das nicht eine Gesamtsteigerung um 40,2 % und nicht gleich einer Steigerung um jährlich 20,1 %.

   (a) Die Lehrkraft erklärt: „Ursache für das Paradoxon ist, dass die Grundwerte für die beiden Steigerungen verschieden sind und die Prozentsätze daher nicht addiert werden dürfen. Steigerung um 20,1 % bedeutet, dass man nun 120,1 % hat, also mit 1,201 multiplizieren muss. Die Multiplikation mit 1,201 für das Vorjahr und nochmals mit 1,201 für dieses Jahr ist insgesamt eine Multiplikation mit $1{,}201^2 = 1,442401$, also eine Steigerung um 44,2401 %. Dagegen entsprechen die hier angegebenen Steigerungen um 25 bzw. 15,2 % ....“

   Ergänze die Erklärung der Lehrkraft und gib an, welche jährliche Gesamtsteigerung in der oben angegebenen Situation des Händlers vorliegt.

   (b) Der Webseite von PRO BAHN e.V.; www.pro-bahn.de ist zu enthehmen, dass eine Fahrkarte für eine Strecke von 10 km im Jahr 1970 umgerechnet 51 Cent kostete, im Jahr 2020 3,30 Euro. Berechne, welcher jährlichen prozentualen Steigerung dies entspricht.

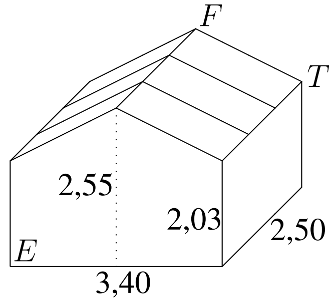
5. Vereinfache und schreibe das Ergebnis ohne Potenzen ($a, b, x > 0$):

   (a) $(\sqrt[6]{8} \cdot 8^{\frac{1}{2}})^4$ (b) $\sqrt{x^{\frac{1}{6}} x^{-\frac{1}{2}}}$ $\quad (x > 0)$ (c) $\sqrt[3]{(5\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\,b^{-2})^2 : \frac{5^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{3}}}{a^{-1}b}}$

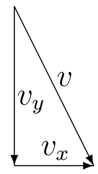
9. Klasse Übungsaufgaben	9
Pythagoras	**08**

1. (a) Notiere die Formel für den Abstand der Punkte $P(x_p|y_p)$ und $Q(x_q|y_q)$. Mache Dir die Formel anhand einer Skizze klar.
   (b) Berechne die Seitenlängen des Dreiecks ABC mit $A(3|2)$, $B(1|1)$, $C(5|-2)$.
   (c) Vom Satz von Pythagoras gilt auch die Umkehrung, d. h. gilt $a^2 + b^2 = c^2$, so hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel. Zeige damit, dass das Dreieck aus Teilaufgabe (b) bei A rechtwinklig ist.

2. (a) Berechne: Wie lang ist der längste Faden, den eine Spinne geradlinig im nebenstehenden Holzhäuschen (Maße in m) spannen könnte?
   (b) Berechne: Wie viel m^2 Dachfläche hat das nebenstehende Holzhäuschen?



3. Anwendung in der Physik: Geschwindigkeitspfeile werden oft zerlegt in Horizontalgeschwindigkeit v_x und Vertikalgeschwindigkeit v_y.
   Dabei können v_x und v_y je nach Richtung (rechts/links bzw. oben/unten) positiv oder negativ sein. Beim Vektor v betrachten wir hier die Pfeillänge $|v|$.

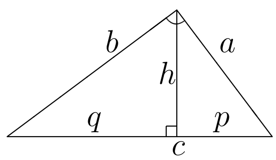


   Ergänze die Tabelle:

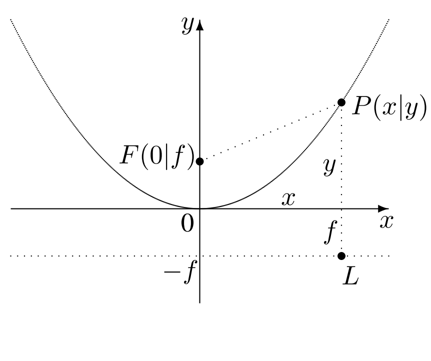
v_x	5	6			3	7
v_y	12	-8	0,8	15		
$\|v\|$			1	17	5	25

4. (a) Berechne Inkreisradius und Kantenlänge eines regelmäßigen Sechsecks mit Umkreisradius r (allgemein in Abhängigkeit von r).
   (b) Suche im regelmäßigen Achteck Hilfslinien, durch die rechtwinklige Dreiecke entstehen.

5. (a) Stelle für die nebenstehende Figur drei Pythagoras-Formeln auf!
   (b) Im rechtwinkligen Dreieck gilt auch der Kathetensatz $a^2 = pc$ (ebenso $b^2 = qc$), der z. B. mit Hilfe ähnlicher Dreiecke (→ grund96.pdf) bewiesen werden kann.
   Setze damit (und mit Hilfe von Teilaufgabe (a)) den hier vorgegebenen Ansatz fort und folgere damit den sog. Höhensatz: $pq = p(c - p) = \ldots$



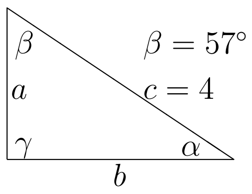
6. Gegeben ist die Standardnormalparabel $y = x^2$ (siehe grund93.pdf).
   Ermittle, welcher Punkt $F(0|f)$ vom Parabelpunkt $P(x|y)$ ebenso weit entfernt liegt wie P von der Geraden $y = -f$ („Leitlinie")?
   (F heißt Brennpunkt der Parabel.)



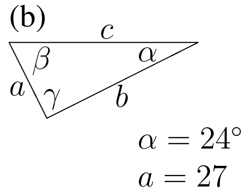
9. Klasse Übungsaufgaben	9
Trigonometrie	**09**

1. Berechne die fehlenden Streckenlängen und Winkel (Taschenrechner, zwei Dezimalen) in den folgenden Dreiecken ($\gamma = 90°$):

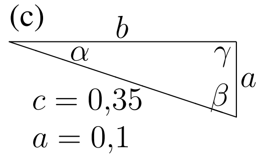
(a)



(b)



(c)

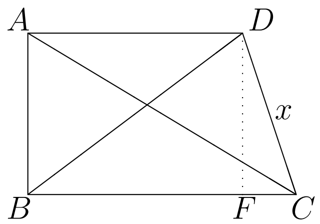


2. Die Geraden $g : y = 3{,}5 - \frac{1}{3}x$, $h : y = 2x$ und die y-Achse begrenzen ein Dreieck.

   (a) Überlege mit Hilfe der Skizze des Steigungsdreiecks, wie der Neigungswinkel der Geraden berechnet werden kann.

   (b) Berechne die Winkel in diesem Dreieck.

3. Die Länge einer unzugänglichen Strecke x soll berechnet werden:
   $|\overline{AB}| = 7$ m,
   $\sphericalangle CBA = 90°$, $\beta = \sphericalangle DBA = 50°$,
   $\sphericalangle BAD = 90°$, $\alpha = \sphericalangle BAC = 56°$



4. Mit bloßem Auge können am Nachthimmel Lichtpunkte unter einem Blickwinkel von $4'$ (Winkelminuten) getrennt gesehen werden. Der Jupiter ist ca. 800 Millionen km von der Erde entfernt. Welche Monde könnten dann theoretisch (wenn sie hell genug wären) noch getrennt vom Jupiter wahrgenommen werden:

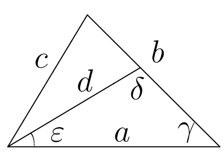
   Io (Bahnradius, d. h. Entfernung vom Jupiter 421 000 km), Europa (672 000 km), Ganymed (1 072 000 km), Kallisto (1 888 000 km).

5. Berechne $1 + \tan^2 \alpha$ für $\alpha = 30°$ und $\alpha = 45°$ exakt,

   (a) indem zunächst $\tan \alpha$ für diese Winkel ermittelt wird,

   (b) indem zunächst dieser Term vereinfacht wird.

6. Berechne im nebenstehenden allgemeinen Dreieck mit $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 4$ den Winkel δ.



9. Klasse Übungsaufgaben	9
Lösen von Gleichungen	**10**

Typ	Name	Lösungsverfahren	Beispiel
$4x+4=-4x+8$			
$5=5$			
$0=5$			
$x^2-8x-20=0$			
$9x^2+12x+4 = 8x+9$			
$9x^2+3=7$			
$x^2-2x=0$			
$x^4-8x^2-20=0$			
$x^3=512$			
$1-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2-x}$			
$\frac{4}{3x-4}=\frac{1}{x+2}$			
$\sqrt{8x+9}-2=3x$			
$\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}$			

9. Klasse Übungsaufgaben	**09**
Kompakt-Überblick zum Grundwissen	**K**

1. Wurzeln, binomische Formeln (siehe auch grund91.pdf): Vereinfache:

   (a) $\frac{\sqrt{144}-\sqrt{44}}{2}$ (b) $\frac{[(x-1)^{-\frac{1}{4}}]^2}{\sqrt{x-1}}$ (vgl. auch grund97.pdf) (c) $\frac{a^5-a^7}{a^2+2a+1}$

2. Quadratische Funktionen: Scheitel (siehe auch grund92.pdf)

   Beschreibe den Graphen zur Funktionsgleichung $y = 2(x-3)(x-1)$ in Worten! Welche Gleichung hat die durch Spiegelung an der x-Achse entstehende Kurve?

3. Quadratische Funktionen: Zeichnung (siehe auch grund93.pdf): $y = -x^2 - 4x + 5$

   Zeichne den Graphen! Zeige, dass die Gleichung $-x^2 - 4x + 5 = -2x + 6$ genau eine Lösung hat! Welche anschauliche Bedeutung hat dies?

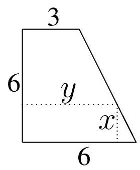
4. Quadratische Gleichungen (siehe auch grund94.pdf)

   Das Produkt meines Alters und des Alters meines Klavierlehrers ist 555. Der Altersunterschied ist 22. Wie alt ist der Klavierlehrer?

5. Vierfeldertafel, Additionssatz (siehe auch grund95.pdf)

   52 Karten, davon 1 Herz-Karo. $\frac{1}{13}$ der Karten sind Könige, 25 % Karo. Berechne auf verschiedene Arten die Wahrscheinlichkeit, Herz oder Karo zu ziehen.

6. Ähnlichkeit, Strahlensatz (siehe auch grund96.pdf):
   Einem Trapez wird ein Rechteck einbeschrieben. Welcher Zusammenhang besteht zwischen x und y? Für welches x ergibt sich ein Quadrat?

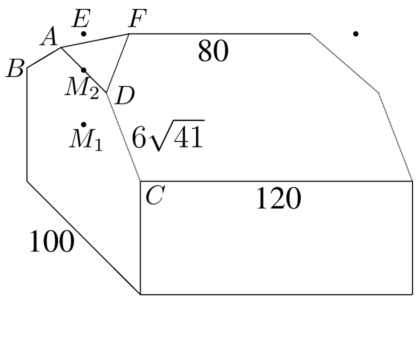


7. Potenzfunktion, n-te Wurzel (siehe auch grund97.pdf)

   Herr S. muss $\sqrt[3]{1{,}6^2} : \sqrt[3]{5}$ ausrechnen, hat seinen Taschenrechner vergessen und muss sich ein anderes Modell ausleihen, das aber keine $\sqrt[3]{\ldots}$-Taste hat.
   Gib verschiedene Möglichkeiten an, wie er trotzdem einen Wert erhält.

8. Pythagoras (siehe auch grund98.pdf)

   Man berechne die restlichen Kantenlängen des sog. Krüppelwalmdachs (siehe nebenstehende Skizze, $\overline{M_1M_2} = 24$, $\overline{M_2E} = 16$, Maße in dm).
   Lösungstipps: Skizziere zuerst das gleichschenklige Trapez $ABCD$ in einer separaten Planfigur und berechne $\overline{AD}$. Ergänze in obigem Schrägbild mit dem Punkt E zu einem Satteldach. Wie lang ist (bei Symmetrieannahme) $\overline{EF}$?



9. Trigonometrie (siehe auch grund99.pdf)

   Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Katheten $a = 4$ und $b = 9$. Berechne die Länge der Hypotenuse c, die Winkel α und β und danach mit Hilfe von α die Höhe h_c.
   Welche anderen Wege zur Berechnung von h_c gibt es?

10. Lösen von Gleichungen (siehe auch grund910.pdf)

    (a) $x - 7 = 9x - \frac{3}{2}$ (b) $2x^2 + 7 = -3(x-3)$ (c) $x^2 = 9x$ (d) $\frac{1}{x} + \frac{8}{x+9} = 1$

    (e) Welcher Fehler wurde hier gemacht: „$x^2 = 49$, also $x = 7$“.

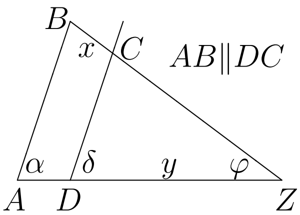
# 9. Klasse Übungen	9
Mathematik bis 9. Klasse kompakt	**M**

Vorbemerkung: Natürlich können fünf Jahre Mathematik-Unterricht nicht auf einer Seite dargestellt werden. Die Seite ist vielmehr als Checkliste der wichtigsten Themen zu sehen. Die unterstrichenen, kleinen Zahlen verweisen auf die entsprechenden Grundwissens-Seiten, z. B. (51) bedeutet siehe grund51.pdf.

1. (a) Berechne: $\frac{11}{16} - \frac{1}{16} \cdot (15^2 - 5^2) - 5$
   (b) Berechne: $(-\frac{1}{5}) : (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ (52), (53), (56), (61)
2. (a) Nach Abzug von 20 % Rabatt bleiben 16,80 Euro. Alter Preis = ?
   (b) In der Halbzeit gehen $6\frac{2}{3}$ % der Zuschauer, nämlich 36. Wie viele sind es danach?
   (c) Von $1{,}8 \cdot 10^4$ Zuschauern feuern 7200 die Mannschaft A an, 5 % sind neutral (wie viele sind das?). Zeichne ein Kreisdiagramm!
   (d) Warum liegt hier keine Proportionalität vor:

Fläche	Bremen 42000 ha	Bayern 70000 km²
Einwohnerzahl	660 000	12,6 Millionen

   (e) Natur: 7 km, Karte: 5,6 cm. Maßstab = ? (51), (58), (59), (62)–(65), (68), (69), (83)
3. Im Viereck $ABCD$ mit $\overline{AC} = 4$ cm, $\overline{BD} = 3$ cm sei AC die Symmetrieachse und $\sphericalangle\, ADC = 90°$. Um welches Viereck handelt es sich? Warum hat es einen Umkreis? Berechne den Flächeninhalt des Vierecks. (54), (55), (510), (66), (71), (72), (79), (710)
4. (a) Betrachte die hier gegebene (nicht maßstäbliche) Figur mit $\sphericalangle\, ABZ = 72°$, $\overline{ZC} = 5{,}5$, $\overline{DC} = 3{,}4$ und $\overline{AB} = 4{,}08$.
   • Bestimme $x = \overline{BC}$.
   • Hier ist $\varphi \approx 36°$. Warum ist auch $y = \overline{DZ} \approx 5{,}5$?
   • Was kann über das Verhältnis der Flächeninhalte des Trapezes $ABCD$ und des kleinen Dreiecks ZDC ausgesagt werden?



   (b) Betrachtet wird eine zylinderförmige Wassertonne mit 162 l = 0,162 m³ Volumen, bei der Höhe und Durchmesser gleich sind. Berechne Höhe und Oberfläche. Verwende dabei $\pi \approx 3$. (67), (810), (96)
5. Im rechtwinkligen Dreieck RST mit $\sphericalangle\, SRT = 90°$ sei $r = \overline{ST} = 37$ und $s = \overline{RT} = 12$. Berechne $t = \overline{SR}$ und gib $\sin\tau$, $\cos\tau$ und $\tan\sigma$ mit Hilfe von r, s und t an ($\tau = \sphericalangle\, RTS$, $\sigma = \sphericalangle\, TSR$). Löse die Gleichung für $\tan\sigma$ nach t auf. (98), (99)
6. Vereinfache: • $\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x}$ • $x^{-3} \cdot \sqrt[4]{2^2 x^8}$ (71), (72), (84), (86), (97)
7. Löse folgende (Un-)Gleichungen:
   (a) $2x^2 - 4x = x - 2$ (c) $(\frac{1}{2}x - 2)(0{,}2x - 3) - x(\frac{1}{10}x + 4) < -8{,}75$
   (b) $3x^3 - 2x = 0$ (d) $\frac{2x-3}{x+1} = x + 1$ (76), (77), (710), (84), (87), (91), (94), (910)
8. Bestimme x, y in folgendem Gleichungssystem: $2x + 3y = 11$, $3x - 2y = -16$. (89)
9. Welche Form und Lage haben die Graphen zu $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$, $g(x) = \frac{2}{3}(x-1)$ und $h(x) = \frac{6}{x-3} + 2$ im Koordinatensystem? Argumentiere ohne Rechnung, warum sich f und g schneiden. (81), (82), (85), (92), (93)
10. Bausteine in einem Säckchen: r r r b b b b r b
   (a) Gib den Median der Noppenzahl an.
   (b) Wie viele verschieden gemusterte Türme der Höhe 3 könnte man aus roten (r) und blauen (b) 1er-Steinen bauen?
   (c) Ein Stein wird gezogen, Z: „2 Noppen“, R: „rot“. Erstelle eine Vierfeldertafel für die Wahrscheinlichkeiten. (57), (78), (88), (95)

9. Klasse Lösungen — 9
Wurzeln, binomische Formeln — 01

1. (a) $x-36\geq 0$: $x\geq 36$; $D=[36;\infty[$.
   (b) $x+36>0$: $x>-36$; $D=]-36;\infty[$.
   (c) Der Radikand muss ≥ 0 sein: $x^2-12x+36\geq 0$, also $(x-6)^2\geq 0$. Da Quadrate nie negativ sind, ist dies stets der Fall. Also sind alle x-Werte erlaubt: $D=\mathbb{R}$.
2. (a) $\sqrt{5\cdot 100}+3\sqrt{2\cdot 49}-5\sqrt{4\cdot 2}-3\sqrt{9\cdot 5}=10\sqrt{5}+21\sqrt{2}-10\sqrt{2}-9\sqrt{5}=$
   $=\sqrt{5}+11\sqrt{2}$
   (b) $\sqrt{64k^2}=8|k|$
   (c) $\left(\frac{\sqrt{x^5y}}{\sqrt{5a}}:\frac{\sqrt{x^3y^3}}{\sqrt{a^2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{25x}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{x^5y\cdot a^2}\sqrt{25x}}{\sqrt{5a\cdot x^3y^3}\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{x^5ya^2\cdot 25x}{5ax^3y^3a}}=\sqrt{\frac{5x^3}{y^2}}=\frac{x}{y}\sqrt{5x}$
3. (a) $\frac{1}{\sqrt2}=\frac{1\cdot\sqrt2}{\sqrt2\cdot\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$
   (b) $\frac{\sqrt2-\sqrt{125}}{\sqrt5}=\frac{(\sqrt2-\sqrt{125})\cdot\sqrt5}{\sqrt5\cdot\sqrt5}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{625}}{5}=\frac{\sqrt{10}-25}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}-5$
   (c) $\frac{2}{3-\sqrt5}=\frac{2(3+\sqrt5}{(3-\sqrt5)(3+\sqrt5)}=\frac{2(3+\sqrt5}{3^2-\sqrt5^2}=\frac{2(3+\sqrt5)}{9-5}=\frac{3+\sqrt5}{2}$
4. Wegen $1{,}41^2=1{,}9881\neq 2$ ist $\sqrt2$ nicht genau $1{,}41$.

   Näherung z. B. durch Intervallschachtelung: Wegen $1{,}41^2=1{,}9881$ und $1{,}42^2=2{,}0164$ liegt $\sqrt2$ zwischen $1{,}41$ und $1{,}42$. Probieren mit $1{,}415^2=2{,}002225$, $1{,}413^2=1{,}996569$ und $1{,}414^2=1{,}999396$ zeigt, dass $\sqrt2$ zwischen $1{,}414$ und $1{,}415$ liegt, also $\sqrt2=1{,}414\ldots$

   Andere Näherungsmöglichkeit für $\sqrt a$ mit Heron-Verfahren: Dabei berechnet man ausgehend von einem Startwert schrittweise mit der Formel $x_{\text{neu}}=\frac12(x_{\text{alt}}+\frac{1}{x_{\text{alt}}})$ einen besseren Wert, hier ist z. B. mit x_{alt} dann $x_{\text{neu}}=\frac12(1{,}41+\frac{2}{1{,}41})\approx 1{,}414\ldots$.
5. (a) i. $(mn-p)(p+mn)=(mn-p)(mn+p)=m^2n^2-p^2$
   ii. $(-r-s)^2=(-r)^2+2(-r)(-s)+(-s)^2=r^2+2rs+s^2$
   (b) i. $11x^2-66x+99=11(x^2-6x+9)=11(x-3)^2$
   ii. $9x^2-121=(3x+11)(3x-11)$
   iii. $81x^4-1=(9x^2+1)(9x^2-1)=(9x^2+1)(3x+1)(3x-1)$
   iv. $3x^2+39x+507=3(x^2+13x+169)$
   (Weitere Vereinfachung ist nicht möglich, da das gemischte Glied nicht zur binomischen Formel $(x+13)^2=x^2+26x+169$ passt.)
   (c) i. $x^2-10x+25=(x-5)^2$
   ii. $\frac{1}{100}x^2+x+25=(\frac{1}{10}x+5)^2$
   (Lösungsweg: 1. Schritt: Schreibe $\frac{1}{100}x^2+x+\ldots=(\frac{1}{10}x+?)^2$.
   2. Schritt: Überlege das gemischte Glied: $2\cdot\frac{1}{10}x\cdot ?=x$, also $\frac{2}{10}\cdot ?=1$, also $?=5$.
   3. Schritt: Binomische Formel für $(\frac{1}{10}x+5)^2$ ausrechnen.)
6. (a) Summen/Differenzen (z. B. $(a+b)^3$) nicht einzeln potenzieren!
   Sondern: Ausmultiplizieren: $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
   (b) Summen/Differenzen (z. B. a^7-a^5) können nicht zusammengefasst werden.
   Sondern: Gemeinsame Faktoren ausklammern, eventuell binomische Formeln suchen, sonst stehen lassen: $\frac{a^7-a^5}{a^3-a^2}=\frac{a^5(a^2-1)}{a^2(a-1)}=\frac{a^5(a+1)(a-1)}{a^2(a-1)}=a^3(a+1)$

9. Klasse Lösungen — 9
Quadratische Funktionen: Scheitel — 02

1.

(a) $y = x^2 - 3x - \frac{3}{4} =$
$= (x-1{,}5)^2 - 2{,}25 - \frac{3}{4} =$
$= (x-1{,}5)^2 - 3$. Also $S(1{,}5|{-3})$.

(b) $y = -\frac{1}{4}[x^2 - 24x + 44] =$
$= -\frac{1}{4}[(x-12)^2 - 144 + 44] =$
$= -\frac{1}{4}(x-12)^2 + 25$. Also $S(12|25)$.

(c) $0{,}5(x+12)(x-4) = 0$ liefert
$x_1 = -12$, $x_2 = 4$.

Mitte, also Scheitel, bei $x = -4$.

y-Wert: $y = 0{,}5(-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 24 = -32$. Also $S(-4|-32)$.

2.
$y = -(x-5)^2 + 2 = -x^2 + 10x - 23$

3.
Wegen $y = 3x^2 - 18x + 27 = 3[x^2 - 6x + 9] = 3(x-3)^2$ und $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{3}[x^2 - 6x + 9] = \frac{1}{3}(x-3)^2$ haben beide Parabeln den gleichen Scheitel $S(3|0)$; beide sind nach oben geöffnet, lediglich die erste enger, die zweite weiter.

4.
Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$.
Einsetzen der gegebenen Punkte:

$$\begin{array}{ll} A\colon -38 = a - b + c & | \cdot (-1) \\ B\colon -18 = a + b + c & | \cdot 1 \\ C\colon \underline{-6 = 9a + 3b + c} & \\ \quad 20 = 2b, \text{ also } b = 10. & \end{array}$$

Einsetzen in obige Gleichungen A und C:

$$\begin{array}{ll} -38 = a - 10 + c & | \cdot (-1) \\ \underline{-6 = 9a + 30 + c} & | \cdot 1 \\ 32 = 8a + 40, \text{ also } -8 = 8a;\ a = -1. & \end{array}$$

Einsetzen in $-38 = a - 10 + c$ liefert:
$-38 = -1 - 10 + c$, also $c = -27$.
Die Funktionsgleichung lautet also
$y = -x^2 + 10x - 27$.
Wegen $-x^2 + 10x - 27 = -[x^2 - 10x + 27] = -[(x-5)^2 + 2] = -(x-5)^2 - 2$ liegt der Scheitel bei $S(5|-2)$.

5.

(a)
$$\begin{array}{rl} 2s = 1 + 2 + \ldots + 99 + & \\ \underline{+99 + 98 + \ldots + 1 =} & \\ 100 + 100 + \ldots + 100 & = 100 \cdot 99 = \\ & = 9900; \end{array}$$

Also $s = 1 + \ldots + 99 = \frac{9900}{2} = 4950$.

(b)
$$\begin{array}{rcl} 2s = 1 + \ldots + x + & & \\ \underline{+x + \ldots + 1 =} & & \\ 1 + x + \ldots + 1 + x & = & (1+x) \cdot x; \end{array}$$

also $s = 1 + \ldots + x = \frac{x(1+x)}{2}$.

(c) $y = \frac{1}{2}x(x+1)$ hat die Nullstellen $x = 0$, $x = -1$, der Scheitel liegt also in der Mitte bei $x = -\frac{1}{2}$.

y-Wert: $y = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2} + 1) = -\frac{1}{8}$.
Also $S(-\frac{1}{2}|-\frac{1}{8})$.

6.

G: Fläche $A = ab$

N: Bei der Einbettung in das gegebene Koordinatensystem hat die fallende Gerade die Steigung $-\frac{21}{29{,}7}$ und den y-Achsenabschnitt 21, Geradengleichung also $y = -\frac{21}{29{,}7}x + 21$. Einsetzen der Stelle b liefert $a = \ldots$.

A: $a = -\frac{21}{29{,}7}b + 21$.

D: $A = ab = (-\frac{21}{29{,}7}b + 21)b$
$= -\frac{21}{29{,}7}b^2 + 21b$.

Umbenennung $b \leftrightarrow x$, $A \leftrightarrow y$ liefert die Funktionsgl. $y = -\frac{21}{29{,}7}x^2 + 21x = (-\frac{21}{29{,}7})x(x - 29{,}7)$.

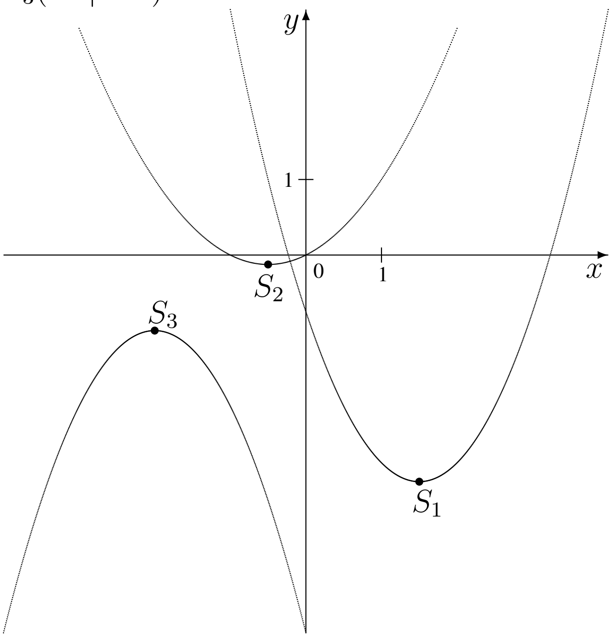
E: Die Nullstellen liegen bei $x = 0$ und $x = 29{,}7$, Scheitel also bei $x = \frac{29{,}7}{2}$. Da die Parabel nach unten geöffnet ist, liegt hier der höchste Punkt, d. h. hier ergibt sich der größte y-Wert (also wie gewünscht die größte Rechtecksfläche). Man wähle also $b = \frac{29{,}7}{2}$.

9. Klasse Lösungen	9
Quadratische Funktionen: Zeichnung	**03**

1.
I hat Scheitel $S_1(1{,}5|-3)$ ($\rightarrow$ ueb92.pdf, Aufgabe 1 (a)) und Nullstellen $x_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{3}$ ($\rightarrow$ grund94.pdf, Beispiel 1).

II hat Scheitel $S_2(-\frac{1}{2}|-\frac{1}{8})$ ($\rightarrow$ ueb92.pdf, Aufgabe 5 (c)) und Nullstellen 0 und -1.

III hat wegen $y = -[x^2 + 4x + 5] =$
$= -[(x+2)^2 + 1] = -(x+2)^2 - 1$ den Scheitel $S_3(-2|-1)$ und keine Nullstellen.



2.

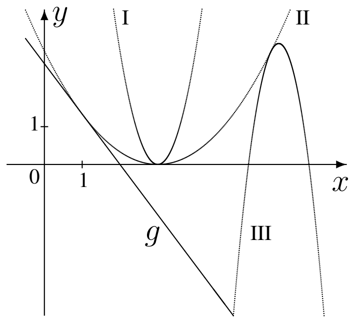
(a) $x^2 - 3x - \frac{3}{4} = -x^2 - 4x - 5$;
$2x^2 + x + 4{,}25 = 0$;
$2[x^2 + 0{,}5x + 2{,}125] = 0$;
$2[x^2 + 0{,}5x + 0{,}25^2 - 0{,}25^2 + 2{,}125] = 0$;
$2[(x + 0{,}25)^2 + 2{,}0625] = 0$;
$(x + 0{,}25)^2 = -2{,}0625$ ↯
keine Lösung, somit keine gemeinsamen Punkte. [Oder Lösungsformel $x_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot2\cdot4{,}25}}{2\cdot2}$ mit negativem Radikanden]

(b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 24$ (lineare Gl.!)
$\frac{1}{2}x = 4x - 24$; $\quad 24 = 3{,}5x$; $\quad x = \frac{48}{7}$.
Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen, z. B. II, liefert
$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{7} \cdot (1 + \frac{48}{7}) = \frac{1320}{49}$
Also ein gemeinsamer Punkt $(\frac{48}{7}|\frac{1320}{49})$.

3.
Die Parabel $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 11$ ist nach unten geöffnet mit Scheitel $S(12|25)$ ($\rightarrow$ ueb92.pdf, Aufgabe 1 (b)).
Scheitel bei Punktspiegelung:
$S'(-12|-25)$, ferner ist die Parabel dann nach oben geöffnet; also
$y = \frac{1}{4}(x + 12)^2 - 25 = \frac{1}{4}x^2 + 6x + 11$.

4.
I und II haben beide den Scheitel $S(3|0)$ ($\rightarrow$ ueb92.pdf, Aufgabe 3).

III hat wegen
$y = -5[x^2 - 12{,}4x + 37{,}8] =$
$= -5[(x - 6{,}2)^2 - 38{,}44 + 37{,}8] =$
$= -5(x - 6{,}2)^2 + 3{,}2$
den Scheitel $S_3(6{,}2|3{,}2)$.



5.
$\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = -5x^2 + 62x - 189$;
$5\frac{1}{3}x^2 - 64x + 192 = 0$;
$x_{1/2} = \frac{64\pm\sqrt{64^2-4\cdot5\frac{1}{3}\cdot192}}{2\cdot5\frac{1}{3}} = \frac{64\pm0}{\frac{32}{3}} = 6$.
Doppelte Lösung; im Schaubild berühren sich die Graphen.
y-Wert des Berührpunktes durch Einsetzen z. B. in II: $y = \frac{1}{3} \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 + 3 = 3$

6.

(a) $-\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$;
$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$; $\quad | \cdot 3$
$x^2 - 2x + 1 = 0$; $\quad (x - 1)^2 = 0$;
$x_{1/2} = 1$ (Berührung)

(b) $-\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} = -5x^2 + 62x - 189$;
Gemäß grund94.pdf, Beispiel 3 ist $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{23}{3}$.

9. Klasse Lösungen	9
Quadratische Gleichungen	04

1. (a) $x_{1/2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6} = 2{,}5 \pm 0{,}5$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
   (b) $x^2 - 6x - 27 = 0$; $x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 + 27} = 3 \pm 6$; $x_1 = -3$, $x_2 = 9$
   (c) $x_{1/2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0{,}3} = 0{,}5 \pm \sqrt{-0{,}05}$; keine Lösung
   (d) $x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 + 7} = -2 \pm \sqrt{11}$
   (e) $x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{36 - 36} = -6$ (eine doppelte Lösung)
   (f) $x_{1/2} = \frac{11{,}7 \pm \sqrt{11{,}7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4{,}2}}{2 \cdot 3} = \frac{11{,}7 \pm 9{,}3}{6}$; $x_1 = 0{,}4$, $x_2 = 3{,}5$
   (g) $60x^2 + 57x - 18 = 0$; $x_{1/2} = \frac{-57 \pm \sqrt{57^2 + 4 \cdot 60 \cdot 18}}{2 \cdot 60} = \frac{-57 \pm 87}{120}$; $x_1 = -1{,}2$; $x_2 = 0{,}25$
   (h) $x_{1/2} = \frac{-66 \pm \sqrt{66^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1089)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-66 \pm 0}{-2} = 33$ (eine doppelte Lösung).
   (i) $-0{,}5x^2 - 2x + 7 = 0$; $x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 7}}{2 \cdot (-0{,}5)} = \frac{2 \pm \sqrt{18}}{-1} = -2 \mp 3\sqrt{2}$
   (j) $x_{1/2} = \frac{+k \pm \sqrt{(-k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k^2)}}{2 \cdot 2} = \frac{k \pm \sqrt{9k^2}}{4} = \frac{k \pm 3k}{4}$; $x_1 = k$, $x_2 = -\frac{k}{2}$

2. (a) $8(x^2 - x - 7x + 7) = 15$; $8x^2 - 64x + 41 = 0$;
   $D = (-64)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 41 = 2784 > 0$; also 2 Lösungen
   (b) $-(x^2 - x - 7x + 7) = 15$; $-x^2 + 8x - 22 = 0$;
   $D = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-22) = -24 < 0$; also keine Lösung
   (c) $x^2 - 14x + 49 - (x^2 - 2x + 1) = 15$; $-12x + 33 = 0$;
   lineare Gleichung mit 1 Lösung (nämlich $\frac{33}{12} = \frac{11}{4}$)
   (d) $3(x^2 - 20x + 100) + 8100 = x^2 - 137x - 23x + 3151 + 3999$; $2x^2 + 100x + 1250 = 0$;
   $D = 100^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1250 = 0$; also 1 doppelte Lösung

3. Bei (a) und (c) muss ausmultipliziert werden. Bei (a) ergibt sich dann $x_{1/2} = 12 \pm 15$, bei (c) $x_{1/2} = -1$.

   Bei (b) sollte man nicht ausmultiplizieren; denn ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also wenn $x - 7 = 0$ oder $x - 17 = 0$; Lösungen somit $x_1 = 7$, $x_2 = 17$.

   Bei (d) sieht man sofort, dass die Gleichung keine Lösung hat, da ein Quadrat stets ≥ 0 ist.

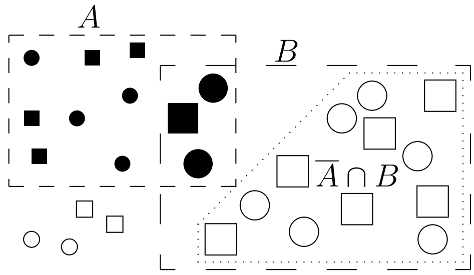
4. Die Zahlen seien x und y. Das Gleichungssystem $x + y = 10$, $x \cdot y = 11$ löst man, indem man die erste Gleichung nach y auflöst ($y = 10 - x$) und in die zweite einsetzt:
   $x(10 - x) = 11$; $10x - x^2 = 11$; $x^2 - 10x + 11 = 0$; $x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 11} = 5 \pm \sqrt{14}$.
   Ist $x = 5 + \sqrt{14}$, so ist $y = 10 - x = 5 - \sqrt{14}$, und umgekehrt.

5. Richtiger Weg: Alles auf eine Seite bringen, x ausklammern:
   $x^2 - 49x = 0$; $x(x - 49) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 49$.
   Im gegebenen falschen Rechenweg fehlte also die erste Lösung $x_1 = 0$.
   Ursache: Man dividiere nie durch einen Ausdruck mit der Lösungsvariablen. Denn da man den Wert von x noch nicht kennt, könnte es sein, dass man verbotenerweise durch 0 dividiert.

6. $3x^2 + 30x + 72 = 0$ hat die Lösungen $x_{1/2} = \frac{-30 \pm \sqrt{900 - 4 \cdot 3 \cdot 72}}{2 \cdot 3} = \frac{-30 \pm 6}{6}$; $x_1 = -4$, $x_2 = -6$. Also $3x^2 + 30x + 72 = 3(x + 4)(x + 6)$.

9. Klasse Lösungen	**9**
Vierfeldertafel, Additionssatz	**05**

1. $\overline{A} \cap B$: „Große nicht ausgefüllte Figuren“
   $\overline{A} \cup \overline{B}$: „Die Figur ist klein oder nicht ausgefüllt“ (alternative Lösung: „Es ist nicht eine große ausgefüllte Figur“)



2.

	J	$\overline{J}$	
S	0,02	0,19	0,21
$\overline{S}$	0,14	0,65	0,79
	0,16	0,86	1

J: „Befragte Person ist jünger als 30 Jahre“
S: „Befragte Person findet, dass ein guter Lehrer auf jeden Fall streng sein soll“

- $P(\overline{J} \cap S) = 0{,}65$
- $P(\overline{J} \cup \overline{S}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$
  (alle Felder außer dem $J \cap S$-Feld)

3. Zunächst nimmt man die Einteilung so vor, dass die Spalten/Zeilen mit „Merkmal—nicht Merkmal“ beschriftet werden, hier also „Buch—nicht Buch“ und „Spielzeug—nicht Sp.“. Da bei allen etwas gefunden wurde, steht im nicht-nicht-Feld die 0.

Absolute Häufigkeiten:

	Sp.	nicht Sp.	
Buch dabei	7	6	13
nicht Buch	11	0	11
	18	6	24

Relative Häufigkeiten:

	Spielzeug	nicht Sp.	
Buch	$\frac{7}{24} = 29{,}1\overline{6}\ \%$	$\frac{6}{24} = 25\ \%$	$\frac{13}{24}$
nicht B.	$\frac{11}{24} = 45{,}8\overline{3}\ \%$	0	$\frac{11}{24}$
	$\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 75\ \%$	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	1

4.

Blütenfarbe / Blütentyp	gelb G	rot R	weiß W	
einfach E	5 %	35 %	15 %	55 %
doppelt $\overline{E}$	10 %	15 %	20 %	45 %
	15 %	50 %	35 %	100 %

Es kommen nur rot-einfach oder weiß (egal) in Frage:
$(R \cap E) \cup W$
$P((R \cap E) \cup W)$
$= 0{,}35 + 0{,}35 = 0{,}70 = 70\ \%$

5. E: „Enthält Ziffer 3“, also $E = \{30, 31, 32, 33, 34, \ldots, 39\} \cup \{3, 13, 23, 43, 53, 63, 73, 83, 93\}$, somit $10 + 9 = 19$ Elemente, also $P(E) = \frac{19}{80}$.
   T: „Teilbar durch 3“, also $T = \{3, 6, 9, \ldots 78\}$, wegen $78 = 3 \cdot 26$ ist $P(T) = \frac{26}{80}$.
   $E \cap T = \{3, 30, 33, 36, 39, 63, 93\}$, also $P(E \cap T) = \frac{7}{80}$.
   $P(E \cup T) = P(E) + P(T) - P(E \cap T) = \frac{19}{80} + \frac{26}{80} - \frac{7}{80} = \frac{38}{80} = \frac{19}{40} = 47{,}5\ \%$

6. K: Knabe, P: Möchte Pferd, Vierfeldertafel mit bisherigen Informationen:

	K	$\overline{K}$	
P	$\frac{1}{4}x$		
$\overline{P}$	$\frac{3}{4}x$	9	
	x	$25 - x$	25

Für x kommen zunächst nur die durch 4 teilbaren und höchstens 25 betragenden Zahlen 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24 in Frage. Dann ist $\frac{3}{4}x$ eine der Zahlen 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18.

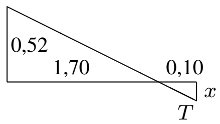
In der $\overline{P}$-Zeile steht dann die Zeilensumme 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Letzteres ist nicht möglich, da dies der Gesamtzahl 25 widerspricht. Somit ist x höchstens 24.

9. Klasse Lösungen — 9
Ähnlichkeit, Strahlensatz — 06

1. (a) $\Delta ADT \sim \Delta ACB$, also $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{TD}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|}$
$\frac{x}{6} = \frac{x+10}{10}$; $\qquad 10x = 6x + 60$
$x = 15$
Ebenso $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TD}|}$
$\frac{15+y}{10} = \frac{15}{6}$; $\qquad 6(15+y) = 15 \cdot 10$
$90 + 6y = 150$
$y = 10$
Teilverhältnis $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \frac{6}{10-6}$

(b) $\Delta ATC \sim \Delta BTD$, also $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TC}|} = \frac{|\overline{BT}|}{|\overline{TD}|}$
$\frac{x}{6} = \frac{y}{10}$; $\qquad 10x = 6y$
Ferner $|\overline{AB}| = x + y = 15$,
also $y = 15 - x$ eingesetzt:
$10x = 6(15 - x)$; $\qquad 10x = 90 - 6x$
$x = \frac{90}{16} = \frac{45}{8} = 5{,}625$
$y = 15 - x = 15 - \frac{45}{8} = \frac{75}{8} = 9{,}375$
Teilverhältnis $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = \frac{x}{y} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

2. Die Dreiecke sind ähnlich, da sie in den Winkeln übereinstimmen, denn:
$\sphericalangle(r,t) = 90° - \sphericalangle(t, F_G) = \sphericalangle(F_G, F_N)$, $\sphericalangle(s,r) = 90° = \sphericalangle(F_N, F_H)$.
$\frac{F_H}{F_G} = \frac{\text{kürzere Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{s}{t}$

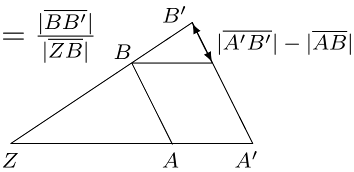
3. 

Nach Einzeichnen einer Hilfslinie auf Höhe der Seitenwand folgt:
$\frac{x}{0{,}10} = \frac{0{,}52}{1{,}70}$, also $x = \frac{0{,}52 \cdot 0{,}10}{1{,}70} \approx 0{,}03$.
Somit befindet sich T etwa $2{,}03 - 0{,}03 = 2{,}00$ m über dem Boden.

4. (a) $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{ZB'}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|}$ (d. h. die Querstrecken verhalten sich wie die von Z aus gemessenen Stücke auf den Schenkeln)

(b) $\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZA'}| - |\overline{ZA}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} - 1 = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} - 1 = \frac{|\overline{ZB'}| - |\overline{ZB}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{ZB}|}$

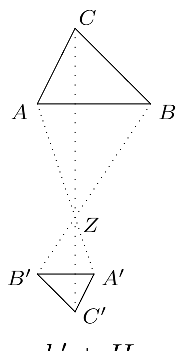
$\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} - 1 = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} - 1 = \frac{|\overline{A'B'}| - |\overline{AB}|}{|\overline{AB}|}$



(c) Betrachte V-Figur von E aus: $\frac{|\overline{DF}|}{|\overline{EF}|} = \frac{|\overline{CG}|}{|\overline{EG}|}$, also $|\overline{DF}| = \frac{|\overline{CG}| \cdot |\overline{EF}|}{|\overline{EG}|} = \frac{14 \cdot 6}{6+9} = 5{,}6$.
Betrachte X-Figur von D aus: $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DF}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{EF}|}$, also $|\overline{AD}| = \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{DF}|}{|\overline{EF}|} = \frac{12 \cdot 5{,}6}{6} = 11{,}2$.
Tipp: Das Umstellen der Formel ist bequemer, wenn man beim Aufschreiben der Verhältnisse die gesuchte Streckenlänge in den Zähler schreibt.

5. (a) $m = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{A'C'}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{B'C'}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{ZC'}|}{|\overline{ZC}|}$

(b) Für $m = -\frac{1}{2}$ siehe Bild rechts.
Für $m = -1$ erhält man eine Punktspiegelung an Z.



6. (a) $m = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{3}{5}$.
Für die Höhen gilt der gleiche Streckungsfaktor: $\frac{h'}{h} = \frac{3}{5}$. Ferner $h = h' + H$.
Auflösen der ersten Gleichung nach h' und Einsetzen in die zweite liefert
$h = \frac{3}{5}h + H$, $\frac{2}{5}h = H$, $h = \frac{5}{2}H = 2{,}5$.

(b) $V = \frac{1}{3}Gh$, verkleinerte Pyramide: $V' = \frac{1}{3}G'h'$.
Da Flächen mit dem Faktor m^2 zu multiplizieren sind, folgt
$V' = \frac{1}{3}m^2 G \cdot mh = m^3 \cdot \frac{1}{3}Gh = m^3 V$

9. Klasse Lösungen	9
Potenzfunktion, n-te Wurzel	**07**

1. $f(x) = 3x^6$: Trogförmig, achsensymmetrisch zur y-Achse, Verlauf „von links oben nach rechts oben“, wegen des Streckungsfaktors 3 durch $(-1|3)$, $(0|0)$, $(1|3)$.

   $f(x) = -1{,}2x^3$: Punktsymmetrisch zum Ursprung, wegen der Vorfaktors $-1{,}2$ im Vergleich zur x^3-Funktion gestreckt und gespiegelt, Verlauf „von links oben nach rechts unten“, durch die Punkte $(-1|1{,}2)$, $(0|0)$, $(1|-1{,}2)$

   Schnittstellen: $3x^6 = -1{,}2x^3$; $3x^6 + 1{,}2x^3 = 0$; $3x^3(x^3 + 0{,}4) = 0$;
   $x = 0$ oder $x^3 + 0{,}4 = 0$; also $x = 0$ oder $x = -\sqrt[3]{0{,}4}$.
   Schnittpunkte somit $(0|0)$ und $(-\sqrt[3]{0{,}4}|0{,}48)$

2. (a) Einsetzen von P und Q in den Ansatz $y = ax^n$ liefert:
   $100 = a \cdot (-5)^n$, $2{,}56 = a \cdot 2^n$.
   Wegen der Lage der Punkte P, Q liegt ein Verlauf von links oben nach rechts oben vor, also ist n gerade, somit $(-5)^n = 5^n$.
   Auflösen der Gleichungen nach a und Gleichsetzen: $a = \frac{100}{5^n} = \frac{2{,}56}{2^n} \quad | \cdot 2^n : 100$
   $\frac{2^n}{5^n} = \frac{2{,}56}{100}$; $(\frac{2}{5})^n = 0{,}256$; $0{,}4^n = 0{,}0256$
   Probieren gerader Potenzen für n liefert $n = 4$.
   $a = \frac{100}{5^n} = \frac{100}{5^4} = 0{,}16$, gesuchte Potensfunktionsgleichung somit $y = 0{,}16x^4$

   (b) Wegen der Lage des Punktes Q nicht möglich, da Potenzfunktionen alle durch $(0|0)$ verlaufen.

   (c) P, Q einsetzen in $y = ax^n$: $486 = a(-3)^n$, $-64 = a \cdot 2^n$.
   Wegen der Lage der Punkte P, Q liegt ein Verlauf von links oben nach rechts unten vor, also ist n ungerade (und $a < 0$), somit $(-3)^n = -3^n$.
   $a = -\frac{486}{3^n} = -\frac{64}{2^n} \quad | \cdot 2^n : (-486)$
   $\frac{2^n}{3^n} = \frac{64}{486}$; $(\frac{2}{3})^n = \frac{32}{243}$; Probieren ungerader Potenzen für n liefert $n = 5$.
   $a = -\frac{486}{3^5} = -2$, gesuchte Potensfunktionsgleichung somit $y = 2x^5$

3. (a) $1000x^3 - 27 = 0$; $x^3 = \frac{27}{1000}$; also $x = \frac{3}{10} = 0{,}3$ (eine Lösung)

   (b) $3{,}2x^4 = 18{,}4$; $x^4 = \frac{18{,}4}{3{,}2} = 5{,}75$; $x = \pm\sqrt[4]{5{,}75} \approx \pm 1,549$ (zwei Lösungen!)

4. (a) …einer Multiplikation mit 1,25 bzw. 1,152, insgesamt also $1{,}25 \cdot 1{,}152 = 1{,}44$, also einer Steigerung um 44 %, was wegen $1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44$ einer jährlichen Steigerung um 20 % entspricht; man muss also hierbei den Faktor x suchen, mit dem sich $1{,}44 = x \cdot x = x^2$ ergibt.

   (b) Wie in Teilaufgabe (a) muss man den jährlichen Faktor x suchen, mit dem sich nach 50 Jahren $3{,}30 = 0{,}51x^{50}$ ergibt. $x^{50} = \frac{3{,}30}{0{,}51}$.
   $x = \sqrt[50]{\frac{3{,}30}{0{,}51}} \approx 1{,}038$. Die jährliche Steigerung beträgt also ca. 3,8 %.

5. (a) $(\sqrt[6]{8} \cdot 8^{\frac{1}{2}})^4 = (8^{\frac{1}{6}} \cdot 8^{\frac{1}{2}})^4 = (8^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}})^4 = (8^{\frac{2}{3}})^4 = 8^{\frac{8}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^8 = (\sqrt[3]{8})^8 = 2^8 = 256$

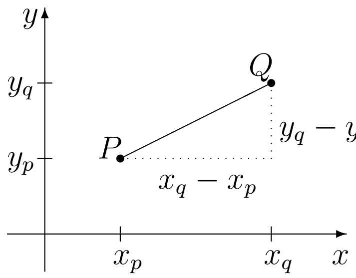
   (b) $\sqrt{x^{\frac{1}{6}}x^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{-\frac{1}{3}}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$

   (c) $\ldots = \sqrt[3]{5^2(a^{\frac{1}{2}})^2(a^{\frac{1}{3}})^2 b^{-2\cdot 2} \cdot \frac{a^{-1}b}{5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{5^2 a^1 a^{\frac{2}{3}} b^{-4} \cdot a^{-1}b \cdot 5^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{3}}} =$
   $\sqrt[3]{5^{2-\frac{1}{2}}a^{1+\frac{2}{3}-1-\frac{1}{3}}b^{-4+1}} = \left(5^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{3}}b^{-3}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{9}}b^{-1} = \frac{\sqrt{5}\,\sqrt[9]{a}}{b}$

9. Klasse Lösungen — 9
Pythagoras — 08

1.

(a) $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$



(b) $|\overline{AB}| = \sqrt{(1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$,

$|\overline{BC}| = \sqrt{(5-1)^2 + (-2-1)^2} =$
$= \sqrt{16+9} = 5$,

$|\overline{AC}| = \sqrt{(5-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20}$.

(c) Ist bei A der rechte Winkel, so ist $\overline{BC}$ die Hypotenuse; es muss also gelten $|\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{AB}|^2$.

Dies gilt wegen $|\overline{BC}|^2 = 25$,
$|\overline{AC}|^2 + |\overline{AB}|^2 = 20 + 5 = 25$.

2.

(a) Als längste Strecke kommen in Betracht: Von der vorderen unteren Ecke E zur hinteren Firstecke F oder von E zur Trauf-Ecke T.

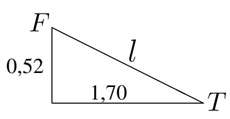
Wie bei der Diagonalen im Quader (→ grund96.pdf) berechnet man:

$|\overline{EF}|^2 = 1{,}70^2 + 2{,}50^2 + 2{,}55^2$,
$|\overline{EF}| \approx 3{,}96$.

$|\overline{ET}|^2 = 3{,}40^2 + 2{,}50^2 + 2{,}03^2$,
$|\overline{ET}| \approx 4{,}68$ (alles in m).

Längster Faden also: 4,68 m.

(b)



Dachlänge:
$l^2 = 0{,}52^2 + 1{,}70^2$, $l \approx 1,78$.

Dach links: $A \approx 1{,}78 \cdot 2{,}50 \approx 4,45$

Dachfläche: $2A \approx 8,9$ (m²)

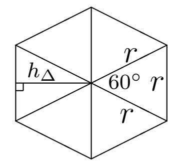
3.

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$, also $v_x = \pm\sqrt{v^2 - v_y^2}$,
$v_y = \pm\sqrt{v^2 - v_x^2}$, $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

v_x	5	6	±0,6	±8	3	7
v_y	12	−8	0,8	15	±4	±24
$\|v\|$	13	10	1	17	5	25

4.

(a)



Das regelmäßige Sechseck kann in gleichseitige Dreiecke zerlegt werden. Daher ist die Kantenlänge gleich dem Umkreisradius r. Der Inkreisradius ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck: $h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}r$.

(c) Nennt man die Ecken $A_1, A_2, \ldots, A_8$ und den Mittelpunkt M, so zeichne man die Verbindungslinie $\overline{A_1A_3}$ ein. Dann ist MA_1A_3 ein rechtwinkliges Dreieck, das durch $\overline{MA_2}$ in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird.

5.

(a) $p^2 + h^2 = a^2$, $q^2 + h^2 = b^2$, $a^2 + b^2 = c^2$

(b) Aus (a) folgt $h^2 = a^2 - p^2$. Somit

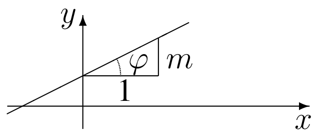
$pq = p(c-p) = pc - p^2 =$
$= a^2 - p^2 = h^2$ (Höhensatz)

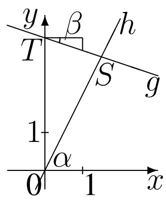
6.

Es soll gelten: $|\overline{FP}| = |\overline{PL}|$
Mit der Formel für Abstände im Koordinatensystem folgt:
$\sqrt{x^2 + (y-f)^2} = y + f$
Quadrieren beider Seiten:
$x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2$
$x^2 + y^2 - 2yf + f^2 = y^2 + 2yf + f^2$
$x^2 = 4yf$
Mit $y = x^2$ folgt
$x^2 = 4x^2 f$
$f = \frac{1}{4}$. Also Brennpunkt $F(0|\frac{1}{4})$.

9. Klasse Lösungen — 9
Trigonometrie — 09

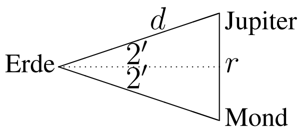
1. (a) $\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 90° - 57° = 33°$ (Winkelsumme im Dreieck)
   $\sin\beta = \frac{b}{c}$, also $b = c\sin\beta = 4\sin 57° \approx 3{,}35$
   $\cos\beta = \frac{a}{c}$, also $a = c\cos\beta = 4\cos 57° \approx 2{,}18$ (oder Pythagoras: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$)
   (b) $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 24° = 66°$
   $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, also $c = \frac{a}{\sin\alpha} \approx 66{,}38$; $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, also $b = \frac{a}{\tan\alpha} \approx 60,64$
   (c) $a^2 + b^2 = c^2$, also $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{0{,}35^2 - 0{,}1^2} \approx 0{,}34$
   $\sin\alpha = \frac{a}{c} \approx 0{,}29$, also $\alpha \approx 16{,}60°$; $\cos\beta = \frac{a}{c} \approx 0{,}29$, also $\beta \approx 73{,}40°$

2. (a) 

   Die Gerade $y = mx + t$ mit Steigung m hat als Steigungsdreieck „1 nach rechts, m nach oben“. Man liest dort ab: $\tan\varphi = \frac{m}{1} = m$.
   (b) 

   Gerade h: Steigung $m = 2$. Aus $\tan\alpha = 2$ folgt Neigungswinkel $\alpha \approx 63{,}43°$. Somit $\sphericalangle SOT = 90° - \alpha \approx 26{,}57°$.
   Gerade g: Steigungsdreieck (3 nach rechts, 1 nach unten); aus $\tan\beta = \frac{1}{3}$ folgt $\beta \approx 18{,}43°$. Also $\sphericalangle OTS = 90° - \beta \approx 71{,}57°$.
   Winkelsumme im Dreieck: $\sphericalangle TSO \approx 81{,}86°$

3. ΔABC: $\tan\alpha = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}$, also $|\overline{BC}| = |\overline{AB}|\tan\alpha \approx 10{,}38$
   ΔABD: $\tan\beta = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|}$, also $|\overline{AD}| = |\overline{AD}|\tan\beta \approx 8{,}34$
   Pythagoras im ΔDFC: $x = \sqrt{|\overline{DF}|^2 + |\overline{FC}|^2} \approx \sqrt{7^2 + (|\overline{BC}| - |\overline{AD}|)^2} \approx 7{,}29$

4. 

   Halbiert man nebenstehendes gleichschenkliges Dreieck, so erkennt man: $\sin 2' = \frac{r/2}{d}$, somit ergibt sich als Entfernung r von noch getrennt wahrnehmbaren Lichtpunkten:
   $r = 2d\sin 2' = 2 \cdot 800 \cdot 10^6 \cdot \sin(\frac{2}{60})°$ km $\approx 930\,000$ km.
   Somit könnten theoretisch Ganymed und Kallisto noch getrennt gesehen werden.

5. Es ist $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
   (a) $\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$
   $1 + \tan^2 30° = 1 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}$; $1 + \tan^2 45° = 2$
   (b) $1 + \tan^2\alpha = 1 + (\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^2 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
   $1 + \tan^2 30° = \frac{1}{\cos^2 30°} = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \frac{4}{3}$; $1 + \tan^2 45° = \frac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 2$

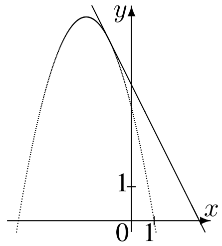
6. Vorüberlegung: Zur Berechnung von δ muss man das untere Teildreieck betrachten und benötigt hier eine weitere Größe; hierfür bietet sich der Winkel γ an, da dieser auch im ganzen Dreieck vorkommt und dort schon drei Seitenlängen bekannt sind. Von Sinussatz und Kosinussatz kommt hierfür nur der Kosinussatz in Frage, da er derjenige ist, in dem drei Seitenlängen vorkommen.
   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{25+16-9}{2\cdot 5\cdot 4} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma \approx 36{,}9°$
   Unteres Teildreieck: Sinussatz (Kosinussatz wäre möglich, ergäbe aber quadratische Gleichung).
   $\frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{a}{d} \Rightarrow \sin\delta = \frac{\sin\gamma \cdot a}{d} = 0{,}75 \Rightarrow \delta_1 \approx 48{,}6°$ oder $\delta_2 \approx 131{,}4°$
   Im ersteren Fall wäre (Winkelsumme im unteren Teildreieck) $\varepsilon \approx 94{,}5°$ der größte Winkel in diesem Dreieck; da dort a die größte Seite ist, muss jedoch der a gegenüberliegende Winkel δ der größte sein, also ist $\delta \approx 131{,}4°$.

# 9. Klasse Lösungen	9
Lösen von Gleichungen	**10**

Typ	Name	Lösungsverfahren	Beispiel
$4x+4=-4x+8$	Lineare Gleichung	x-Glieder auf eine Seite, Rest auf die andere	$4x+4x=8-4$ $8x=4$; $x=\frac{1}{2}$; $L=\{\frac{1}{2}\}$
$5=5$	Allgemeingültig	Alle erlaubten x sind Lösung	$L=D$ bzw. $L=\mathbb{R}$
$0=5$	Unerfüllbar	Keine Lösung	$L=\{\}$
$x^2-8x-20=0$	Quadratische Gleichung in Normalform	p,q-Formel $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$ (oder allg. Formel mit $a=1$)	$x_{1/2}=4\pm\sqrt{16+20}$ $x_1=-2$; $x_2=10$ $L=\{-2;10\}$
$9x^2+12x+4=$ $=8x+9$	Allgemeine quadratische Gleichung	Nach 0 auflösen; Mitternachtsformel $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$9x^2+4x-5=0$ $x_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot9\cdot5}}{2\cdot9}=\frac{-4\pm14}{18}$ $x_1=\frac{5}{9}$; $x_2=-1$ $L=\{-1;\frac{5}{9}\}$
$9x^2+3=7$	Reinquadratische Gleichung	Nach x^2 auflösen. Keine, eine oder zwei Lösungen!	$x^2=\frac{4}{9}$ $x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$ $L=\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\}$
$x^2-2x=0$	Qu. Gl. ohne Konstante (nur wenn rechte Seite $=0$ ist!)	x ausklammern; ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist	$x(x-2)=0$ $x=0$ oder $x-2=0$ $x_1=0$, $x_2=2$ $L=\{0;2\}$
$x^4-8x^2-20=0$	Biquadr. Gleichung (nicht verpflichtend im Lehrplan)	Substitution $u=x^2$	$u^2-8u-20=0$ $u_1=-2$; $u_2=10$; $x_{1/2}\ \lightning$, $x_{3/4}=\pm\sqrt{10}$ $L=\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\}$
$x^3=512$	Reine Potenzgleichung	Umkehroperation hoch 3 $\leftrightarrow$ hoch $\frac{1}{3}$	$x=512^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{512}=8$ $L=\{8\}$
$1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^2-x}$	Allgemeine Bruchgleichung	Nenner faktorisieren; mit Hauptnenner multiplizieren; Definitionsmenge!	Nenner $x^2-x=x(x-1)$ $D=\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$ $HN=x(x-1)$ $x(x-1)-(x-1)=1$ $x^2-2x=0$ $x=0$ ($\notin D$) oder $x=2$ $L=\{2\}$.
$\dfrac{4}{3x-4}=\dfrac{1}{x+2}$	Bes. Bruchgl.: li. und re. Seite nur ein Bruch	Kreuzweise multiplizieren. Definitionsmenge!	$D=\mathbb{R}\backslash\{-2;\frac{4}{3}\}$ $4(x+2)=3x-4$ $x=-12$; $L=\{-12\}$
$\sqrt{8x+9}-2=3x$	Wurzelgleichung (nicht verpflichtend im Lehrplan)	Definitionsmenge! Wurzel isolieren; quadrieren; Probe!	$D=[-\frac{9}{8};\infty[$ $\sqrt{8x+9}=3x+2$ $8x+9=9x^2+12x+4$ $x_1=\frac{5}{9}$ ($\surd$), $x_2=-1$ ($\lightning$) $L=\{\frac{5}{9}\}$
$\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}$	Trigonometr. Gleichung	Taschenrechner (SHIFT) $\cos^{-1}$	$\alpha=45°$ Näheres $\to$ 10. Klasse!

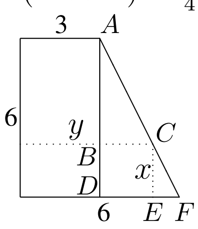
9. Klasse Lösungen	09
Kompakt-Überblick zum Grundwissen	**K**

1. (a) $\frac{\sqrt{144}-\sqrt{44}}{2} = \frac{12-2\sqrt{11}}{2} = 6 - \sqrt{11}$
   (b) $\ldots = (x-1)^{-\frac12} \cdot (x-1)^{-\frac12}$
   $= (x-1)^{-1} = \frac{1}{x-1}$
   (c) $\ldots = \frac{a^5(1-a^2)}{(a+1)^2} = \frac{a^5(1+a)(1-a)}{(a+1)^2} =$
   $= \frac{a^5(1-a)}{1+a}$
2. Enge Parabel mit den Nullstellen 1 und 3, also Scheitel bei $(2|-2)$.
   Spiegelung: $y = -2(x-3)(x-1)$.
3. Scheitel S mit quadr. Ergänzung:
   $y = -[x^2+4x-5] = -[(x+2)^2-9] = -(x+2)^2+9$, also $S(-2|9)$.
   $-x^2-4x+5 = -2x+6$;

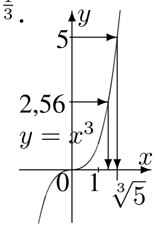
   

   $0 = x^2+2x+1$;
   $x_{1/2} = -1$ (1 Lsg.)
   Anschaulich: Die Gerade $y = -2x+6$ berührt die Parabel in einem Punkt.
4. Sei x das Alter des Klavierlehrers. Mein Alter: $x-22$.
   $x\cdot(x-22) = 555$; $x^2-22x-555 = 0$;
   $x_{1/2} = 11 \pm 26$. Also ist er 37.
5. H: Herz gezogen. K: Karo gezogen.

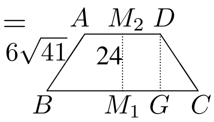
	H	$\overline{H}$	
K	$\frac{1}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{13}{52} = \frac14$
$\overline{K}$	$\frac{3}{52}$	$\frac{36}{52}$	$\frac{39}{52}$
	$\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$	$\frac{48}{52}$	1

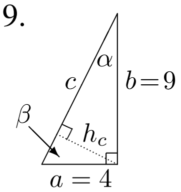
   $P(H \cup K) = \frac{1}{52} + \frac{12}{52} + \frac{3}{52} = \frac{16}{52} \approx 31\ \%$
   Oder: $P(H \cup K) = P(H) + P(K) - P(H \cap K) = \frac14 + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$
6. 

   $\Delta ADF \sim \Delta ABC$
   $\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$
   $\frac36 = \frac{y-3}{6-x}$ (oder: $\Delta ADF \sim \Delta CEF$: $\frac36 = \frac{6-y}{x}$)
   Quadrat: $x = y$, also $\frac36 = \frac{x-3}{6-x}$
   Kreuzweise mult.: $3(6-x) = 6(x-3)$
   $18-3x = 6x-18$; $36 = 9x$; $x = 4$
7. $\sqrt[3]{1{,}6^2} : \sqrt[3]{5} = (1{,}6^2)^{\frac13} : 5^{\frac13} = ((\frac85)^2)^{\frac13} : 5^{\frac13} = (\frac{8^2}{5^2} : 5)^{\frac13} = (\frac{8^2}{5^3})^{\frac13} = \frac{8^{\frac23}}{5^{\frac33}} = \frac{(\sqrt[3]{8})^2}{5} = \frac45$.
   Oder: Verwendung der x^y-Taste und $\sqrt[3]{1{,}6^2} : \sqrt[3]{5} = (1{,}6^2)^{\frac13} : 5^{\frac13}$.
   Oder näherungsweise: Zeichnung des Graphen zu $y = x^3$ und Ablesen von $\sqrt[3]{2{,}56}$ und $\sqrt[3]{5}$.

8. ΔGCD: $24^2 + \overline{GC}^2 = (6\sqrt{41})^2$; $\overline{GC} = 30$
   Also $\overline{AD} = 40$.

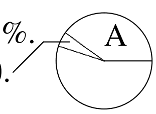
   Ferner $\overline{EF} = (120-80) : 2 = 20$.
   Die Punkte EFM_2D bilden eine kleine Pyramide. Im Dreieck M_2DE (mit rechtem Winkel bei M_2) gilt dabei:
   $\overline{ED}^2 = \overline{M_2D}^2 + \overline{M_2E}^2 = 656$.
   ΔEDF (rechter Winkel bei E):
   $\overline{DF}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{EF}^2 = 656 + 20^2 = 1056$, also $\overline{DF} = \sqrt{1056} \approx 32{,}5$
9. 

   $c = \sqrt{a^2+b^2} =$
   $= \sqrt{4^2+9^2} \approx 9{,}85$
   $\tan\alpha = \frac49 \approx 0{,}44$, also $\alpha \approx 23{,}96°$
   $\beta = 180° - \gamma - \alpha \approx 66{,}04°$
   $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$, also $h_c = b\sin\alpha \approx 3{,}66$
   Andere Wege: $\cos\beta = \frac{h_c}{a}$ oder Fläche $A = \frac12 ab = \frac12 ch_c$, also $h_c = \frac{ab}{c}$
10. (a) $-5{,}5 = 8x$; $x = -\frac{5{,}5}{8} = -\frac{11}{16}$
    (b) $2x^2+3x-2 = 0$; $x_{1/2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2}$; $x_1 = \frac12$; $x_2 = -2$
    (c) $x(x-9) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 9$
    (d) $D = \mathbb{R}\backslash\{0; -9\}$; $\overset{\text{Mult. mit HN}}{\scriptstyle x(x-9)}$:
    $x+9+8x = x(x+9)$;
    $x^2 = 9$; $L = \{-3; 3\}$
    (e) Zwei Lösungen: $x_{1/2} = \pm 7$

9. Klasse Lösungen	9
Mathematik bis 9. Klasse kompakt	**M**

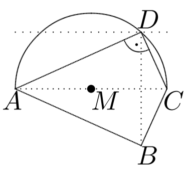
1.
(a) $\ldots = \frac{11}{16} - \frac{1}{16} \cdot (225 - 25) - 5 =$
$= \frac{11}{16} - \frac{200}{16} - 5 = -\frac{189}{16} - \frac{80}{16} = -\frac{269}{16}$
(b) $\ldots = (-\frac{1}{5}) : (-\frac{3}{6} + \frac{2}{6}) = (-\frac{1}{5}) : (-\frac{1}{6}) = \frac{6}{5}$

2.
(a) 16,80 Euro entsprechen 80 %, also alter Preis $= 16{,}80 : 0{,}80 = 21$ (Euro)
(b) 36 entsprechen $6\frac{2}{3}$ %, also Grundwert = alle Zuschauer $= 36 : (6\frac{2}{3} : 100) = 36 : \frac{20}{3 \cdot 100} = 36 \cdot \frac{300}{20} = 540$.
Noch übrig: $540 - 36 = 504$.
(c) A-Anteil: $\frac{7200}{18000} = 0{,}4 = 40$ %.
Neutral: $0{,}05 \cdot 18000 = 900$.



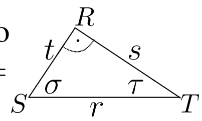
Winkel im Kreisdiagramm:
A: 40 % von $360° = 0{,}4 \cdot 360° = 144°$.
Neutral: $0{,}05 \cdot 360° = 18°$.
(d) Bei direkter Prop. müsste Quotientengleichheit vorliegen, es ist jedoch $\frac{12600000}{70000} = 180$, aber $\frac{660000}{420} > 1000$.
(e) 7 km = 700000 cm, $700000 : 56 = 125000$, also Maßstab 1:125000.

3.
Drachenviereck.
D auf Thaleskreis über $[AC]$
$\to A, B, C, D$ auf Kreis.
$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 6$ cm².



4.
(a) $V = r^2\pi h = (\frac{h}{2})^2 \pi h = \frac{h^3}{4}\pi \approx \frac{h^3}{4} \cdot 3$.
Mit $V = 162\,\text{dm}^3$ folgt (in dm) $\frac{h^3}{4} \cdot 3 \approx 162$, also $h^3 \approx 216$, also $h \approx 6$ (dm).
$O = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2(\frac{h}{2})^2\pi + 2\frac{h}{2}\pi h = \frac{3}{2}h^2\pi \approx \frac{3}{2} \cdot 6^2 \cdot 3 = 162$ (dm² $= 1{,}62$ m²).
(b) • $\Delta ZAB \sim \Delta ZDC$: $\frac{x+5{,}5}{4{,}08} = \frac{5{,}5}{3{,}4}$;
$x + 5{,}5 = \frac{5{,}5}{3{,}4} \cdot 4{,}08 = 6{,}6$, also $x = 1{,}1$.
• $\alpha = \delta = 180° - 36° - 72° = 72°$.
Da das Dreieck ZCD annähernd wegen der gleichen Basiswinkel gleichschenklig ist, ist auch $y \approx 5{,}5$.
• Vergrößerungsfaktor für die Streckenlängen der ähnlichen Dreiecke $m = \frac{6{,}6}{5{,}5}$, also Faktor für die Flächen $m^2 = (\frac{6}{5})^2 = \frac{36}{25}$. Da sich die Dreiecksflächen wie 36:25 verhalten, verhält sich $A_{\text{Trapez}} : A_{\Delta ZDC} = 11 : 25$.

5.
Pythagoras: $r^2 = s^2 + t^2$, also $t = \sqrt{r^2 - s^2} = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1225} = 35$.



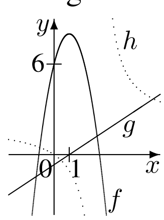
$\sin\tau = \frac{t}{r}$, $\cos\tau = \frac{s}{r}$, $\tan\sigma = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{\tan\sigma}$.

6.
• $\ldots = \frac{2x}{x(x-2)} - \frac{2(x-2)}{x(x-2)} = \frac{2x-2x+4}{x(x-2)} = \frac{4}{x(x-2)}$
• $\ldots = x^{-3} \cdot 2^{2 \cdot 0{,}25} x^{8 \cdot 0{,}25} = \sqrt{2} \cdot x^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{x}$

7.
(a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4}$; $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.
(b) $x(3x^2 - 2) = 0$; $x = 0$ oder $3x^2 - 2 = 0$;
$x_1 = 0$ oder $x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.
(c) $\frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{2}{5}x + 6 - \frac{1}{10}x^2 - 4x < -8{,}75$;
$-5{,}9x < -14{,}75$; $x > \frac{14{,}75}{5{,}9} = 2{,}5$.
(d) $\frac{2x-3}{x+1} = x + 1$; Def.menge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
$2x - 3 = (x+1)(x+1)$; $2x - 3 = x^2 + 2x + 1$; $-4 = x^2$; $\lightning$, also $L = \{\}$.

8.
$$\begin{array}{lrcll}
\text{I} & 2x + 3y &=& 11 & | \cdot 2 \\
\text{II} & 3x - 2y &=& -16 & | \cdot 3 \\
\hline
& 13x &=& -26; & x = -2;
\end{array}$$
z. B. in I:
$-4 + 3y = 11$;
$y = 5$.

9.
$f(x)$: Nach unten geöffnete, enge Parabel mit Scheitel bei $(1|8)$ und Nullstellen für $x - 1 = \pm 2$, also $x = -1$, $x = 3$.
$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$: Steigende Gerade mit y-Achsenabschnitt $-\frac{2}{3}$ und Nullstelle $x = 1$.
$h(x)$: Hyperbel mit Definitionslücke/senkrechter Asymptote $x = 3$; waagrechte Asymptote $y = 2$.
f und g schneiden sich, da die Parabel nach unten geöffnet ist und die Gerade ihre Nullstelle genau unter dem Scheitel der Parabel hat.



10.
(a) Noppenzahlen 1111$\underline{1}$1223, Median 1.
(b) Je Stein rot oder gelb: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
(c)

	Z	$\overline{Z}$	
R	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$
$\overline{R}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$
	$\frac{2}{0}$	$\frac{7}{9}$	1