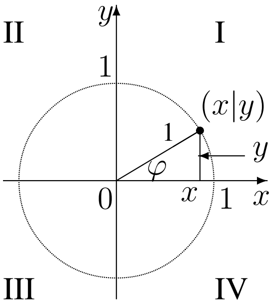
9. Klasse TOP 10 Grundwissen	9
Trigonometrie	**09**

Sinus, Kosinus am Einheitskreis (= Kreis mit Radius $r = 1$)



$\cos\varphi = x$, $\sin\varphi = y$

Insbesondere ergibt sich also z. B.

- für $\varphi = 30°$ ein „halbes" gleichseitiges Dreieck mit $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2}$,
- für $\varphi = 45°$ ein gleichschenkliges Dreieck („halbes Quadrat") mit $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

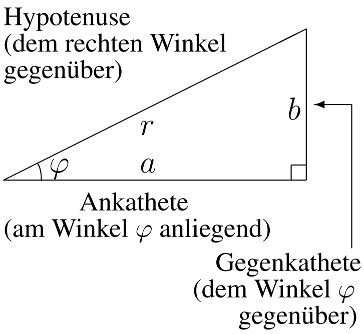
Beispiel:
Für den Punkt mit $r = 1$, $\varphi = 60°$ („Polarkoordinaten") erhält man $x = \cos 60° = \frac{1}{2} = 0{,}5$, $y = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ („kartesische Koordinaten")

Tangens, Kotangens
$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, $\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\tan\varphi}$

Trigonometrischer Pythagoras
Wegen $x^2 + y^2 = 1$ ist $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$, Kurzschreibweise: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Weitere Formeln (z. B. $\sin(90° - \varphi) = \cos(\varphi)$, Additionstheoreme) → Formelsammlungen.

sin, cos, tan am rechtwinkligen Dreieck

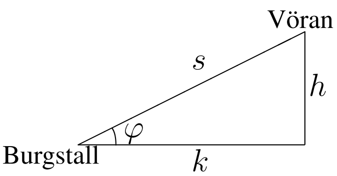


Denkt man sich das nebenstehende Dreieck mit dem Faktor $\frac{1}{r}$ gestreckt (bzw. gestaucht), so erhält man eines mit Hypotenuse 1, Ankathete $\frac{a}{r}$ und Gegenkathete $\frac{b}{r}$ und kann obige Erklärung von sin und cos am Einheitskreis anwenden:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{b}{r}}{\frac{a}{r}} = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Beispiel: Seilbahn Burgstall (270 m) – Vöran (1200 m), horizontale Entfernung 3,7 cm auf der Karte im Maßstab 1:50 000, Annahme eines geradlinig verlaufenden Seils s.



$= 0{,}037 \text{ m} \cdot 50\,000 = 1850 \text{ m}$

$h = 1200 \text{ m} - 270 \text{ m} = 930 \text{ m}$, k siehe Skizze links.
Hier ist k die Ankathete von φ, h die Gegenkathete.
$\tan\varphi = \frac{h}{k} = \frac{930}{1850} \approx 0{,}503$.
Je nach Taschenrechner [TR] ermittelt man meist mit den Tasten (SHIFT) $\tan^{-1}$ vor oder nach Eingabe des Wertes 0,503 den Winkel:
$\varphi \approx 26{,}7°$.

(TR auf DEGREE, siehe TR-Bedienungsanleitung, oft z. B. mit Tasten SHIFT-SETUP 3 oder MODE 4 oder durch wiederholtes Drücken einer DRG-Taste; im TR-Display wird dies meist durch DEG angezeigt [oder D oder nichts, aber **nicht** RAD oder GRAD!])

s mit Pythagoras oder z. B. $\sin\varphi = \frac{h}{s}$, also $s \cdot \sin\varphi = h$, also $s = \frac{h}{\sin\varphi} = \frac{930 \text{ m}}{\sin 26{,}7°} \approx 2{,}1$ km.

Dreiecksberechnungen im allgemeinen Dreieck
Je nach gegebenen Größen wählt man einen der folgenden Sätze:

Sinussatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

(Die Seitenlängen verhalten sich wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel)

Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

(„verallgemeinerter Pythagoras")