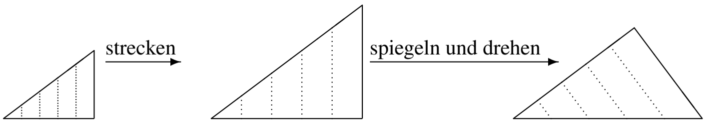
9. Klasse TOP 10 Grundwissen — 9
Ähnlichkeit, Strahlensatz — 06

Ähnliche Figuren sehen bis auf die Größe gleich aus. Sie haben gleiche Winkel und gleiche Streckenverhältnisse. Bei der Betrachtung geometrischer Skizzen ist es meist hilfreich, sich eine Teilfigur gestreckt („aufgeblasen“) oder gestaucht („geschrumpft“) zu denken und in eine andere Teilfigur hineinzudrehen oder hineinzuspiegeln.



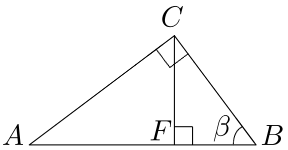
Schreibweise:
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Für die **Ähnlichkeit von Dreiecken** genügt eines der folgenden Merkmale:

- Lauter gleiche Winkel
- Lauter gleiche Streckenverhältnisse
- Ein gemeinsamer Winkel und ein gemeinsames Streckenverhältnis, und zwar das Verhältnis der Seiten, die diesen Winkel einschließen (oder von zwei anderen Seiten, sofern die größere Seite dem Winkel gegenüber liegt).

Beispiele:

- Ein **rechtwinkliges Dreieck** wird durch die Höhe auf der Hypotenuse in zwei Teildreiecke zerlegt. Dann ist jedes der Teildreiecke zum ganzen Dreieck ähnlich:



$\Delta FBC \sim \Delta ABC$
Begründung: Die Dreiecke haben beide einen rechten Winkel und den gemeinsamen Winkel β, sind daher ähnlich.

Also stimmen auch die entsprechenden Streckenverhältnisse überein.

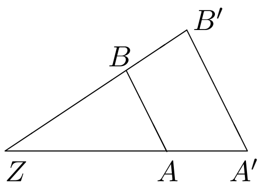
Dabei entsprechen die nebenstehenden Seiten einander:

	im ΔFBC	im ΔABC	
	$\overline{BC}$	$\overline{AB}$	dem rechten Winkel gegenüber
	$\overline{FC}$	$\overline{AC}$	dem Winkel β gegenüber
	$\overline{FB}$	$\overline{BC}$	an beiden Winkeln anliegend

Also kann man z. B. folgendes Streckenverhältnis bilden: $\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{FB}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}$

Nach kreuzweiser Multiplikation folgt: $|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}| \cdot |\overline{FB}|$.

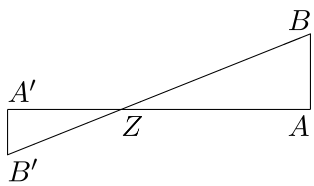
- **Strahlensatz V-Figur**



Ist $AB \| A'B'$, so ist $\Delta ZAB \sim \Delta ZA'B'$, da dann die Dreiecke lauter gleiche Winkel haben.

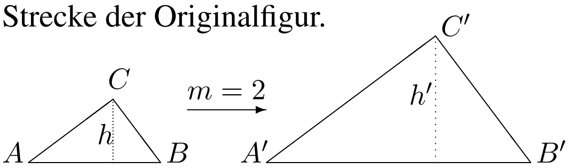
Somit gelten: $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZB'}|}$ und $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{A'B'}|}$

Strahlensatz X-Figur



Streckungsfaktor m

In ählichen Figuren ist jede Strecke der Bildfigur m-mal so lang wie die entsprechende Strecke der Originalfigur.



$|\overline{A'B'}| = m \cdot |\overline{AB}|$ usw.
Bei $m > 1$ erhält man eine Vergrößerung, bei $0 < m < 1$ eine Verkleinerung.

Beachte: Flächeninhalte werden dabei mit dem Faktor m^2 vergrößert:

$$A_{\Delta A'B'C'} = \tfrac{1}{2}|\overline{A'B'}| \cdot h' = \tfrac{1}{2}m|\overline{AB}| \cdot mh = m^2 A_{\Delta ABC}$$