9. Klasse TOP 10 Grundwissen — 9
Quadratische Gleichungen — 04

Erster Schritt
Quadratische Gleichungen löst man meist, indem man **zuerst alles auf eine Seite bringt**, also die Gleichung auf die folgende Form bringt:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sonderfälle mit „fehlendem“ linearen Glied bx (reinquadr. Gleichung) bzw. fehlender Konstante c (x ausklammern!) sowie biquadr. Gleichungen (Substitution!) $\rightarrow$ grund910.pdf.

Lösen allgemeiner quadratischer Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$
Oft „Mitternachtsformel“ (so wichtig, dass man sie auch mitten in der Nacht auswendig wissen muss):

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ist der Wert unter der Wurzel 0, so hat man nur eine Lösung (sog. doppelte Lösung).
Ist der Wert unter der Wurzel negativ, so kennzeichnet man dies als verbotenen Ausdruck; die quadratische Gleichung hat dann keine Lösung.
Beispiel 1: $4x^2 - 14x - 30 = 0$
Man verwendet die Lösungsformel mit $a = 4$, $b = -14$ und $c = -30$:

$$x_{1/2} = \frac{+14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 4 \cdot (-30)}}{2 \cdot 4} = \frac{14 \pm 26}{8}; \quad x_1 = 5; x_2 = -1{,}5$$

Beispiel 2: $x^2 - 6x - 16 = 0$: $x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 10}{2}; \quad x_1 = 8; x_2 = -2$
Beispiel 3: $-\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} = -5x^2 + 62x - 189$
$5x^2 - 63\frac{1}{3}x + 191\frac{2}{3} = 0 \quad | \cdot 3$
$15x^2 - 190x + 575 = 0$; $x_{1/2} = \frac{190 \pm \sqrt{36100 - 4 \cdot 15 \cdot 575}}{2 \cdot 15} = \frac{190 \pm 40}{30}$; $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{23}{3}$.
Beispiel 4: $x^2 + 6x + 6 = 0$: $x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -3 \pm \sqrt{3}$
Beispiel 5: $\frac{1}{2}x^2 - x + 2 = 0$: $x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 2}}{2 \cdot 0{,}5} = 1 \pm \sqrt{-3}$ ↯ Keine Lösung: $L = \{\}$
Beispiel 6: $x^2 + 6x + 6 = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$
$0{,}5x^2 + 7x + 4 = 0$; $x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 4}}{2 \cdot 0{,}5} = -7 \pm \sqrt{41}$

Ist $a = 1$, lautet die Gleichung also $x^2 + bx + c = 0$, spricht man von einer Gleichung in Normalform, für die man die p, q-Formel verwenden kann (ebenso, wenn die Gleichung bequem durch a dividiert werden kann):
p, q**-Formel für die Lösungen von Gleichungen in Normalform** $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(Bezeichnet man p als „das Mittlere“ und q als „das Hintere“, so könnte man für die kleine Formel sagen: „Minus das Mittlere halbe plusminus Wurzel aus das gerade Hingeschriebene im Quadrat minus das Hintere“.)
Beispiel: $x^2 - 3x - \frac{3}{4} = 0$: $x_{1/2} = +1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 + \frac{3}{4}} = 1{,}5 \pm \sqrt{3}$

Zahl der Lösungen
Ist man nur an der Anzahl der Lösungen interessiert, betrachtet man nur den Ausdruck unter der Wurzel, die sog. **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$. Ist D positiv, so hat die gegebene quadratische Gleichung zwei Lösungen, ist $D = 0$, so gibt es eine doppelte Lösung, und ist D negativ, so gibt es keine Lösung.
Beispiele:
$-5x^2 + 6x - 80 = 0$: $D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-80) < 0$, also keine Lösung.
$5x^2 - 40x + 80 = 0$: $D = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 80 = 0$, also eine doppelte Lösung, nämlich (mit Formel nachrechnen!) $x_{1/2} = 4$