9. Klasse TOP 10 Grundwissen — 9
Quadratische Funktionen: Scheitel — 02

Die **Funktionsgleichung** kann auf verschiedene Arten gegeben sein, z. B.

$y = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $y = a(x+d)^2 + e$ $\qquad$ $y = a(x - n_1)(x - n_2)$

a bestimmt die Form des Funktionsgraphen, n_1, n_2 sind die Nullstellen (siehe unten).

bx nennt man auch lineares Glied, c Konstante.
c ist in der Zeichnung des Graphen der y-Achsenabschnitt
(denn setzt man $x = 0$ ein, so ergibt sich $y = c$, und der Punkt $(0|c)$ ist dann der Schnittpunkt mit der y-Achse).

e bewirkt eine Verschiebung des Graphen nach oben (bzw. bei negativem e nach unten)
(denn in einer Wertetabelle sind dann alle y-Werte um e größer).
d bewirkt eine Verschiebung nach links (bzw. bei negativem d nach rechts)
(denn für x muss um d weniger eingesetzt werden, um den gleichen Funktionswert zu erhalten, der sich ohne d ergäbe).

Die **Graphen** quadratischer Funktionen sind **Parabeln** (→ grund93.pdf); der tiefste bzw. höchste Punkt heißt Scheitel.
Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet ($\cup$), bei $a < 0$ nach unten ($\cap$).
Ist $a = 1$ oder $a = -1$, so kann man sie beim üblichen Koordinatensystem (1 cm für eine Längeneinheit) auch mit der Schablone zeichnen.
Bei $|a| > 1$ ist die Parabel enger ($\cup$), bei $|a| < 1$ weiter ($\cup$).

Bestimmung des Scheitels mit quadratischer Ergänzung

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3
$y = x^2 + 6x + 6$	$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$	$y = -2x^2 + 8x - 3$

1. Schritt: a ausklammern (zum Ausgleich in der Klammer durch a dividieren, in Beispiel 2 also geteilt durch $\frac{1}{2}$, d. h. mal 2):

	$y = \frac{1}{2}[x^2 - 2x + 4]$	$y = -2[x^2 - 4x + \frac{3}{2}]$

2. Schritt: Durch Halbierung des Koeffizienten des linearen Gliedes eine binomische Formel schreiben, Platz lassen für 3. Schritt:

$y = (x+3)^2 \ldots + 6$	$y = \frac{1}{2}[(x-1)^2 \ldots + 4]$	$y = -2[(x-2)^2 \ldots + \frac{3}{2}]$

3. Schritt: Quadriert man die binomische Formel zur Kontrolle aus, so erhält man außer dem gewünschten linearen Glied noch zusätzlich ein Quadrat, das oben nicht dasteht und mit minus wieder ausgeglichen werden muss:

$y = (x+3)^2 - 9 + 6$	$y = \frac{1}{2}[(x-1)^2 - 1 + 4]$	$y = -2[(x-2)^2 - 4 + \frac{3}{2}]$

4. Schritt: Zusammenfassen und äußere Klammer wieder ausmultiplizieren:

$y = (x+3)^2 - 3$	$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}$	$y = -2(x-2)^2 + 5$

5. Schritt: Angabe des Scheitels: Aus den Werten d und e der Funktionsgleichung $y = a(x+d)^2 + e$ erkennt man (siehe oben), dass es sich um eine verschobene Parabel handelt, und zwar um e nach oben und um d nach links, so dass der Scheitel bei $(-d|e)$ liegt:

$S(-3|-3)$	$S(1|1{,}5)$	$S(2|5)$

Alternative zur quadratischen Ergänzung:
Man bestimmt die **Nullstellen** (Schnittstellen des Graphen mit der x-Achse [→grund81.pdf], sofern solche vorhanden sind), indem man den Funktionsterm gleich 0 setzt: $ax^2+bx+c = 0$; die Lösungsformel ($x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ [→ grund94.pdf]) liefert dann symmetrisch links und rechts von $-\frac{b}{2a}$ liegende Nullstellen, so dass wegen der Achsensymmetrie der Parabel in der Mitte der Nullstellen bei $x = -\frac{b}{2a}$ der Scheitel liegt. Den y-Wert erhält man durch Einsetzen in die Funktionsgleichung. Bei der Nullstellenform $a(x - n_1)(x - n_2) = 0$ ist das Produkt 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also wenn $x_1 = n_1$ oder $x_2 = n_2$ ist.
Beispiel: $y = x^2 - 6x - 16 = (x - 8)(x + 2)$.
Nullstellen (→ grund94.pdf): $x_1 = 8$, $x_2 = -2$. Also ist der Scheitel in der Mitte bei $x = \frac{8+(-2)}{2} = 3$. y-Wert: $x = 3$ einsetzen in $y = x^2 - 6x - 16$ liefert $y = -25$. Also $S(3|-25)$.