9. Klasse TOP 10 Grundwissen	9
Wurzeln, binomische Formeln	01

- **Bedeutung von Wurzeln:**
  Das Wurzelziehen (Radizieren) ist die Umkehrung des Quadrierens. Daher ist z. B.
  $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ und $\sqrt{5}^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.
  Da sowohl $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ als auch $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, muss man bei Variablen, deren Vorzeichen nicht bekannt ist, Betragsstriche setzen: $\sqrt{a^2} = |a|$.
  (Der Betrag einer Zahl a ist die Zahl a selbst, wenn a nichtnegativ ist, und ist die Gegenzahl $-a$, wenn $a < 0$ ist, z. B. also $|3| = 3$, $|-3| = 3$).
- **Definitionsbereich bei Wurzeln:**
  Unter der Wurzel darf nichts Negatives stehen, d. h. der Radikand muss ≥ 0 sein.
  Bei $\sqrt{x}$ muss also $x \geq 0$ sein,
  bei $\frac{1}{\sqrt{x+5}}$ muss $x + 5 > 0$ sein (wegen des Nenners hier $>$ statt $\geq$), d. h. $x > -5$.
- **Rechenregeln für Wurzeln:**
  Produkte und Quotienten/Brüche dürfen unter einer Wurzel zusammengefasst werden:
  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ac}} = \sqrt{\frac{ab}{ac}} = \sqrt{\frac{b}{c}}$
- **Wurzeln teilweise radizieren:**
  Man sucht unter der Wurzel quadratische Faktoren und zieht daraus die Wurzel:
  $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$
  $\sqrt{ab^2c^7} = \sqrt{ab^2c^6c} = bc^3\sqrt{ac}$ (für $a, b, c \geq 0$, sonst $|bc^3|$ mit Betrag!)
  $\sqrt{9x^2 - 36} = \sqrt{9(x^2 - 4)} = 3\sqrt{x^2 - 4}$ (keine weitere Vereinfachung möglich!)
  Umgekehrt: Davor stehende Faktoren quadratisch in die Wurzel: $3\sqrt{7} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63}$
- **Vorsicht: Fehlerquellen beim Rechnen mit Wurzeln:**
  Bei Summen und Differenzen die Wurzeln nicht einzeln ziehen, z. B. $\sqrt{25 - 16}$ ist nicht gleich $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ (links: $\sqrt{9} = 3$, rechts: $5 - 4 = 1$).
  Sondern: Ausdrücke wie $\sqrt{a^2 - b^2}$ oder $\sqrt{c + d}$ können nicht vereinfacht werden.
  Nicht in eine Wurzel hineinkürzen: Beispiel: $\frac{\sqrt{12}}{2}$ ist nicht $\sqrt{6}$.
  Sondern: Teilweise radizieren, falls möglich: $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, oder den Nenner quadratisch in die Wurzel hineinziehen: $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 12} = \sqrt{3}$.
- **Binomische Formeln: Siehe grund73.pdf**:
  Vergiss nicht 2 mal „das gemischte Produkt“!
  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
  Beispiele zur Bererchung binomischer Formeln, auch zum umgekehrten **Faktorisieren**, d. h. Verwandeln der Summe/Differenz in ein Produkt:
  $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
  $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$ (Kontrolle: Gemischtes Produkt $2 \cdot x \cdot 7 = 14x$ passt).
  $x^2 - \frac{1}{4}a^2 = (x + \frac{1}{2}a)(x - \frac{1}{2}a)$
- **Rationalmachen eines Nenners mit Wurzeln durch geschicktes Erweitern:**
  Bei einfachen Wurzeln, z. B. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Erweitern mit $\sqrt{3}$)
  Bei Summen oder Differenzen im Nenner: Mit anderem Vorzeichen so erweitern, dass man die Plusminusformel (3. binomische Formel) anwenden kann, z. B.
  $\frac{6}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} = \frac{6 \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{5})}{(\sqrt{8} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{5})} = \frac{6(\sqrt{8} + \sqrt{5})}{\sqrt{8}^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{6(\sqrt{8} + \sqrt{5})}{8 - 5} = 2(\sqrt{8} + \sqrt{5})$