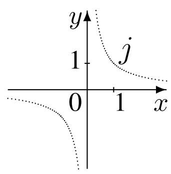
8. Klasse TOP 10 Grundwissen	8
Gebrochen-rationale Funktionen	**05**

Grundform $j(x) = \frac{1}{x}$: Der Graph ist eine Hyperbel:



Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{2x-2} + 1{,}5$$

Umformung und Definitionsbereich:
$f(x) = \frac{1}{2x+2} + 1{,}5 = \frac{1}{2(x-1)} + 1{,}5 = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + 1{,}5 = \frac{0{,}5}{x-1} + 1{,}5$ (→ grund86.pdf).
Da man nicht durch 0 dividieren darf, der Nenner unten also nicht 0 sein darf, ist $2x - 2 = 0$ verboten, also $2x = 2$, also $x = 1$ verboten. Erlaubt sind also alle Zahlen[1] ohne die 1:

$$D = \mathbb{Q}\backslash\{1\}$$

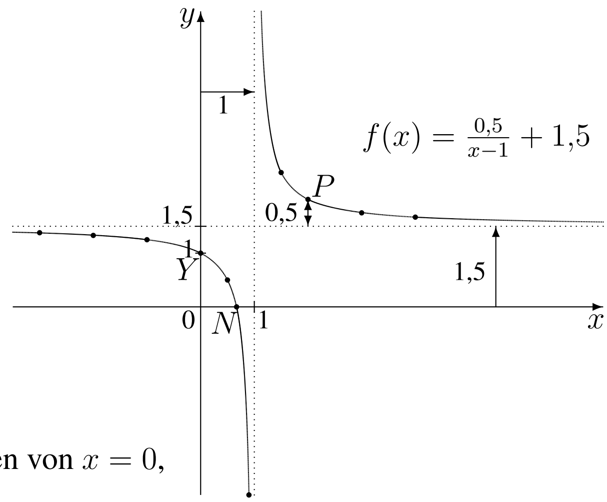
Wertetabelle (mit Taschenrechner, hier gerundete Werte):

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1,38	1,33	1,25	1	$\lightning$	2	1,75	1,67

Besonders interessant sind Werte nahe der verbotenen 1 sowie sehr große x-Werte:

x	-100	0,5	0,9	1,01	1,1	1,5	100	1000
y	1,495	0,5	$-3{,}5$	51,5	6,5	2,5	1,505	1,501

Bedeutung der Zahlen a, b, c in $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, hier $a = 0{,}5$, $b = -1$, $c = 1{,}5$ in Hinblick auf den Graphen und besondere Punkte (→ grund81.pdf):



Waagrechte Asymptote $y = 1{,}5$:
Bei sehr großen x-Werten nähert sich der y-Wert immer mehr dem Wert $c = 1{,}5$, d. h. der Graph nähert sich der waagrechten Geraden auf Höhe 1,5.

Senkrechte Asymptote (Pol):
In der Nähe der verbotenen Stelle $x = -b = 1$ schmiegt sich der Graph (wegen der betragsmäßig sehr großen y-Werte) an die senkrechte Gerade $x = 1$ an.

Schnittpunkt mit der y-Achse: Einsetzen von $x = 0$, hier: $f(0) = \frac{0{,}5}{0-1} + 1{,}5 = 1$, also $Y(0|1)$.

Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen): Funktionsterm gleich 0 setzen und sich ergebende Bruchgleichung lösen (→ grund87.pdf); hier: $\frac{0{,}5}{x-1} + 1{,}5 = 0 \qquad | - 1{,}5$
$\frac{0{,}5}{x-1} = -1{,}5 \qquad | \cdot (x-1)$
$0{,}5 = -1{,}5(x-1)$, also $0{,}5 = -1{,}5x + 1{,}5$, also $-1 = -1{,}5x$, somit $x = \frac{2}{3}$, also $N(\frac{2}{3}|0)$.

Angenehm für die Berechnung von y ist der x-Wert eine Einheit rechts der Definitionslücke, hier also $x = 2$: $f(2) = \frac{0{,}5}{2-1} + 1{,}5 = 0{,}5 + 1{,}5 = 2$, also $P(2|2)$. Damit ergibt sich:

$a = 0{,}5$: Der Graph ist im Vergleich zur Grundfunktion j mit Faktor 0,5 in y-Richtung gestreckt (bei negativem a zusätzlich an der x-Achse gespiegelt).
$b = 1$: Der Graph ist dann um b nach links (hier also um 1 nach rechts) verschoben.
$c = 1{,}5$: Der Graph ist im Vergleich zu j dann um $c = 1{,}5$ nach oben verschoben.

[1] Alle Zahlen, die wir kennen, also in der 8. Klasse rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, ab der 9. Klasse reelle Zahlen $\mathbb{R}$.