



Grundmenge

Je nach Situation kann eine Grundmenge vorgegeben sein, d. h. die Menge der Zahlen, die als Lösung in Frage kommen; beispielsweise bei Textaufgaben kann es sein, dass eine Anzahl gesucht ist, also $G = \mathbb{N}_0$ sinnvoll ist. Liegt die errechnete Lösung nicht in der Grundmenge, so gibt es keine akzeptable Lösung; die Lösungsmenge L ist dann die leere Menge.

Beispiel 1: Gibt es eine natürliche Zahl x , deren Achtfaches ebenso groß ist wie das doppelte der Summe von 4 und x ?

$$8x = 2(x + 4), G = \mathbb{N}$$

$$8x = 2x + 8; 6x = 8; x = \frac{4}{3} \notin G, \text{ somit } L = \{\}$$

Wenn nichts anderes dasteht, ist die Grundmenge die Menge aller Zahlen, die wir kennen.¹

Sonderfälle

Manchmal ergeben sich Gleichungen vom Typ $0 = 0$ oder $0 = 1$.

Beim Typ $0 = 0$ („**allgemeingültige Gleichung**“) hat man in jedem Fall eine wahre Aussage, man kann also für x jede Zahl einsetzen; es ist also $L = G$ bzw. $L = \mathbb{Q}$.

Beim Typ $0 = 1$ („**unerfüllbare Gleichung**“) hat man in jedem Fall eine falsche Aussage, es gibt also keine Zahl, die für x eingesetzt werden kann; es ist also $L = \{\}$.

$$\text{Beispiel 2: } 5x - (36 - 4x) = 9(x - 4); 9x - 36 = 9x - 36; 0 = 0; L = \mathbb{Q}.$$

$$\text{Beispiel 3: } 5x - (3 - 4x) = 9(x + 4); 9x - 3 = 9x + 36; -3 = 36; L = \{\}.$$

Merke ferner: **Nie durch eine Lösungsvariable dividieren!** Sondern: Nach 0 auflösen, als Produkt schreiben und sagen: Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

Beispiel 4: $x^2 = 7x$; mit $| -7x$ folgt $x^2 - 7x = 0$; $x \cdot (x - 7) = 0$. Dieses Produkt ist 0, wenn $x = 0$ oder $x - 7 = 0$ ist, also $x = 0$ oder $x = 7$; somit $L = \{0; 7\}$

Tipps zum Lösen von Textaufgaben

- Lies den Text genau durch; notiere dabei gegebene und gesuchte Größen.
- Entscheide bei mehreren Unbekannten, welche mit x bezeichnet werden soll. Notiere dies z. B. in der Form „Sei $x \dots$ “.
- Drücke eventuelle andere Unbekannte durch x aus.
- Übersetze die Textangaben in mathematische Terme und stelle eine Gleichung auf.
- Löse diese Gleichung.
- Berechne die anderen Unbekannten.
- Gib einen Antwortsatz.

Beispiel 5: Eine Erbschaft von 80 000 Euro wird unter zwei Erben zu ungleichen Teilen aufgeteilt. Der eine legt seinen Anteil zu 4 % Zins an, der andere zu 4,5 %. Nach einem Jahr haben sie zusammen 83 360 Euro. Wie viel erhielt jeder?

- Gegeben: Anfangs zusammen 80 000, zuletzt 83 360. Einer 4 % Zins, anderer 4,5 %.
- Gesucht: Einzelbeträge anfangs.
- Sei x der Anfangsbetrag dessen, der zu 4 % anlegt. Rechnung in Euro.
- Anfangsbetrag des anderen: $80\,000 - x$
- Erhöhung um 4 % heißt Multiplikation mit 1,04. Also:

$$1,04x + 1,045 \cdot (80\,000 - x) = 83\,360$$

- $1,04x + 1,045 \cdot 80\,000 - 1,045x = 83\,360$; $-0,005x + 83\,600 = 83\,360$; $x = 48\,000$
- Anfangsbetrag des anderen: $80\,000 - x = 32\,000$
- Der 4 %-Anleger erhielt 48 000 Euro, der andere 32 000 Euro.

¹In der 7. Klasse also $G = \mathbb{Q}$, ab der 9. Klasse $G = \mathbb{R}$.