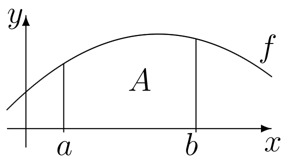
12. Klasse TOP 10 Mathematik	12
Gesamtes Grundwissen mit Übungen	**G**

Grundwissen Mathematik 12. Klasse: Die 10 wichtigsten Themen auf jeweils einer Seite!

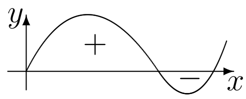
Zum Wiederholen kann man die Übungen des Kompakt-Überblicks verwenden.

G=Grundwissen, Ü=Übungen, L=Lösungen

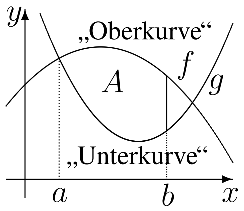
12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Integration — 01



$A = \int\limits_a^b f(x)dx$ kann veranschaulicht werden als **Fläche** unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$, genauer: als Flächenbilanz, wobei Flächen oberhalb der x-Achse positiv zählen, unterhalb der x-Achse negativ.



Flächen zwischen zwei Kurven:
„Oberkurve minus Unterkurve“: $A = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$



Näherungsweise können Flächen auch durch Zerlegung in Streifen und die entsprechende Summe der Streifenflächen berechnet werden (→ ueb121.pdf, Aufgabe 1).

Zur Berechnung von $A = \int\limits_a^b f(x)\,dx$:
Zuerst besorgt man sich eine **Stammfunktion** F, d. h. eine Funktion, deren Ableitung $F'(x)$ den Integranden f ergibt (weitere Hinweise → grund112.pdf, grund117.pdf, grund118.pdf und siehe unten; Hauptsatz und Begriff „Integralfunktion“ → grund122.pdf).

Beispiel: $f(x) = x^2 - 10$; dann ist $F(x) = \frac{x^3}{3} - 10x$ (Kontrolle durch Differenzieren!)

Nun wertet man die Stammfunktion aus durch Einsetzen „Obergrenze minus Untergrenze“:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiel (Klammern setzen, Vorzeichen beachten!):
$\int\limits_{-1}^{3} (x^2 - 10)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 10x\right]_{-1}^{3} = \frac{3^3}{3} - 10\cdot 3 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - 10\cdot(-1)\right] = 9 - 30 + \frac{1}{3} - 10 = -\frac{92}{3}$

Merke Stammfunktionen:

$f(x)$	1	x	x^2	x^n für $n \neq -1$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{N'(x)}{N(x)}$	$v'(x)e^{v(x)}$	$\sin x$
$F(x)$	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\ln\lvert N(x)\rvert$	$e^{v(x)}$	$-\cos x$

Tricks:

- Ausdrücke von der Sorte $\frac{1}{x^3}$ oder $\sqrt{x}$ kann man als x^{-3} bzw. $x^{\frac{1}{2}}$ schreiben und mit der x^n-Formel die Stammfunktion $-\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$ bzw. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ finden.
- Bei Brüchen mit einfachem Nenner ist es manchmal günstig, sie „auseinanderzuziehen“, z. B. bei $f(x) = \frac{3x^4+2x^2+x}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} = 3x^2 + 2 + \frac{1}{x}$.

  Also Stammfunktion: $F(x) = x^3 + 2x + \ln\lvert x\rvert$.
- In Prüfungsaufgaben steht die Stammfunktion manchmal schon da und man muss durch Differenzieren (→ grund116.pdf) lediglich nachweisen, dass es tatsächlich eine Stammfunktion ist.

  Manchmal hat man in vorhergehenden Aufgaben Umformungen gemacht, die das Integrieren wesentlich erleichtern.

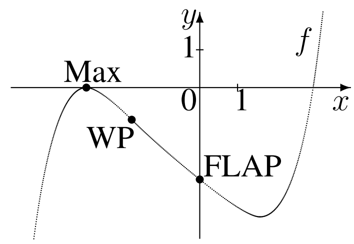
  Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1} = (x^2 - 4) : (x + 1) = x - 1 - \frac{3}{x+1}$ (Polynomdivision!)

  Also Stammfunktion: $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - 3\ln\lvert x + 1\rvert$.

12. Klasse TOP 10 Grundwissen	12
Wendepunkte, Integralfunktionen	**02**

Krümmung und Wendepunkte
$f''(x)$ bilden, $f''(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f'' ermitteln ($\rightarrow$ grund107.pdf, dabei ggf. auch Definitionslücken markieren)
Krümmung: $f'' > 0$: Graph ist in diesem Bereich linksgekrümmt; $f'' < 0$: rechtsgekrümmt.
Dazwischen bei $f''(x) = 0$: **Flachpunkt**; bei Vorzeichenwechsel von f'' sogar **Wendepunkt**; wenn zusätzlich zum Vorzeichenwechsel dort $f'(x) = 0$: **Terrassenpunkt**.
Die y-Koordinate dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in $f(x)$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{100}(x+3)(x^2-9)(x^2+9) = \frac{1}{100}(x^5 + 3x^4 - 81x - 243)$
$f'(x) = \frac{1}{100}(5x^4 + 12x^3 - 81)$
$f''(x) = \frac{1}{100}(20x^3 + 36x^2)$
$f''(x) = 0$: $\frac{1}{100}x^2(20x+36) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = -1{,}8$.



$f'' < 0$ $\quad$ $f'' > 0$ $\quad$ $f'' > 0$
rechts- $\quad -1{,}8$ $\quad$ links- $\quad 0$ $\quad$ links- $\quad$ gekrümmt
WP$(-1{,}8|y)$ $\quad$ FLAP$(0|0)$
mit $y = f(-1,8) \approx -0{,}85$

Unter einer **Wendetangente** versteht man die Tangente im Wendepunkt.

Kriterium für Extrema ($\rightarrow$ grund113.pdf) mit Hilfe der zweiten Ableitung f'':
Bekanntlich genügt $f'(x) = 0$ noch nicht für das Vorliegen eines Extremums, sondern es muss noch ein Vorzeichenwechsel (VZW) von f' vorliegen. Alternativ zur Vorzeichenbetrachtung kann man die in Frage kommenden x-Werte in $f''(x)$ einsetzen. Ist dann an einer solchen Stelle $f''(x) > 0$, so ist dort der Graph linksgekrümmt, d. h. es handelt sich um ein Minimum, bei $f''(x) < 0$ entsprechend um ein Maximum.
Ist an einer solchen Stelle $f''(x) = 0$, so muss man doch die Vorzeichenbereiche untersuchen.
In obigem Beispiel $f(x) = \frac{1}{100}(x+3)(x^2-9)(x^2+9)$ ist
$f'(-3) = \frac{1}{100}(5 \cdot (-3)^4 + 12 \cdot (-3)^3 - 81) = 0$ und
$f''(-3) = \frac{1}{100}(20 \cdot (-3)^3 + 36 \cdot (-3)^2) = -2{,}16 < 0$ und daher $x = -3$ eine Maximalstelle.

Integralfunktion
Bei fester unterer Grenze a und variabler oberer Grenze x erhält man durch $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Integralfunktion.
Beispiel: Eine Integralfunktion zu $f(t) = \frac{1}{4}t + 3$ ist z. B. (bei $a = -4$) gegeben durch
$I(x) = \int_{-4}^{x} (\frac{1}{4}t + 3)dt = \left[\frac{1}{8}t^2 + 3t\right]_{-4}^{x} = \frac{1}{8}x^2 + 3x - (\frac{1}{8} \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4)) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 10.$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion, d. h. $I'(x) = f(x)$.
In obigem Beispiel mit $I(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 10$ ist $I'(x) = \frac{1}{4}x + 3 = f(x)$.
Die Begriffe Integralfunktion und Stammfunktion sind jedoch verschieden: Eine Integralfunktion hat stets mindestens eine Nullstelle (nämlich untere Grenze $x = a$), eine Stammfunktion muss jedoch diese Eigenschaft nicht haben.

Zusammenhänge zwischen Eigenschaften einer Stammfunktion F und $f = F'$

Eig. der Stammfkt. F	Formaler Zusammenhang	Eig. von f an einer Stelle x
F hat Extremum	$F'(x) = f(x) = 0$ mit VZW	f hat Nullstelle mit VZW
F hat Wendepunkt	$F''(x) = f'(x) = 0$ mit VZW	f hat Extremum

12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Erwartungswert, Binomialverteilung — 03

Zufallsvariablen ordnen jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zu.
Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln dem Ergebnis $(3;6)$ die Anzahl der 2er, hier $X((3;6)) = 0$.
Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(X = a)$ die jeweiligen Werte a auftreten.
Zum Beispiel beim zweimaligen Würfeln für die Anzahl X der 2er:

a	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Der **Erwartungswert** $\mu = E(X)$ gibt einen mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten gewichteten Mittelwert an: $\mu = E(X) = \sum\limits_a a \cdot P(X = a)$.
Die **Varianz** $\sigma^2 = V(X)$ und die **Streuung (Standardabweichung)** $\sigma = \sqrt{V(x)}$ sind Maße für die mittlere quadrierte Abweichung vom Mittelwert: $\sigma^2 = V(X) = \sum\limits_a (a-\mu)^2 \cdot P(X=a)$.
In obigem Beispiel: $\mu = E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = \frac{1}{3}$,
$\sigma^2 = V(X) = (0 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{25}{36} + (1 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{10}{36} + (2 - \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$.

Wichtig zum Verständnis der Formeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist der **Binomialkoeffizient**, der angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus n Objekten eine Teilmenge von k Stück (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Taschenrechner: nCr-Taste.
Zum Beispiel Lotto 6 aus 49:
$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!\,6!} = 13\,983\,816$

Hypergeometrische Verteilung: Urnenexperiment Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(A) = \frac{\binom{S}{s}\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

n-mal ohne Zurücklegen

N Kugeln, davon
S schwarze („Treffer")
$N - S$ weiße („Niete")

Ereignis A:
s schwarze
$n - s$ weiße

Binomialverteilung: Urnenexperiment Ziehen mit Zurücklegen
Ein Bernoulli-Experiment (zwei Versuchsausgänge: Treffer und Niete, Trefferwahrscheinlichkeit p) wird n-mal unabhängig durchgeführt (Bernoulli-Kette der Länge n zum Parameter p). Die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erhalten, ist dann

$$B(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(Binomialverteilung → Stochastik-Tafel).

n-mal mit Zurücklegen

„Treffer" mit W. p
„Niete" mit W. $q = 1 - p$

Ereignis A:
Genau k Treffer

Die Wahrscheinlichkeit, **höchstens** k Treffer zu erhalten, ist

$$B(n;p;0) + B(n;p;1) + \ldots + B(n;p;k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$$

(Verteilungsfunktion → Stochastik-Tafel)

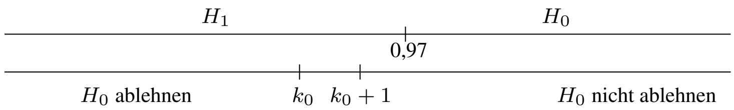
Beispiel 1: Bei einer bestimmten Telefon-Gesellschaft kommen 96 % aller Telefongespräche beim ersten Wählen zustande. Jemand muss 10 Gespräche erledigen. Treffer: „kommt durch", $p = 0{,}96$, $n = 10$.
Betrachte A: „kommt genau einmal nicht durch", B: „kommt mindestens achtmal durch".
A: d. h. genau 9 Treffer: $P(A) = B(10; 0{,}96; 9) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}96^9 \cdot 0{,}04 = 0{,}27701$ (oder Tafel).
B: Komplement $\overline{B}$: „höchstens sieben Treffer". $P(B) = P_{n=10,p=0{,}96}(k \geq 8) = 1 - P_{n=10,p=0{,}96}(k \leq 7) = 1 - 0{,}00621 = 0{,}99379$ (Tafel)
Beispiel 2: Wie oft muss das Experiment durchgeführt werden, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit **mindestens einmal** nicht durchzukommen, wenn die W. hierfür 0,04 beträgt?
Hier notiert man einen Ansatz („Soll gelten: $P_{n=?,p=0{,}04}(k \geq 1) \geq 0{,}90$"), geht zum Komplement über („$P_{n=?,p=0{,}04}(k = 0) \leq 1 - 0{,}90$, d. h. $0{,}96^n \leq 0{,}10$") und löst die entstehende Exponentialgleichung durch beidseitiges Logarithmieren („$n \ln 0{,}96 \leq \ln 0{,}10$, d. h. $n \geq \frac{\ln 0{,}10}{\ln 0{,}96} \approx 56{,}4$, also $n \geq 57$").
Für binomialverteilte Zufallsvariablen gilt $\mu = E(X) = np$ und $\sigma^2 = npq = np(1-p)$.

Testen von Hypothesen | 04

Beispiel:
Eine Telefongesellschaft behauptet, in (mindestens) 97 % der Fälle eine freie Leitung bieten zu können. Es werden 200 Testanrufe durchgeführt. Bei welchem Versuchsausgang kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit (Testniveau) von 5 % („95 % Sicherheit") von einer unwahren Aussage sprechen?

Einseitiger Test:
Treffer: Freie Leitung. Trefferw. p unbekannt. Bernoullikette der Länge $n = 200$.
Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}97$
Alternative H_1: $p < 0{,}97$ („Die Telefongesellschaft lügt")
Ein Test besteht in der Angabe einer **Entscheidungsregel** (ER).

ER: H_0 ablehnen, falls
Trefferzahl $k \leq k_0$.



Liegt das Versuchsergebnis im Ablehnungsbereich, so wird H_0 verworfen („signifikante" Entscheidung für H_1); andernfalls kann man H_0 nicht verwerfen.

Beim Entscheidungsverfahren können **Fehler** auftreten:

Entscheidung / Realität	H_0 nicht abgelehnt	H_0 abgelehnt
$H_0 : p \geq 0{,}97$	Richtiges Urteil	α-**Fehler** (Fehler 1. Art) Schwerer Irrtum (Zu Unrecht Vorwurf der Lüge)
$H_1 : p < 0{,}97$	β-Fehler (Fehler 2. Art) Irrtum (zugunsten der Tel.ges.)	Richtiges Urteil

Die ER wird so festgelegt, dass der α-Fehler (H_0 abgelehnt, obwohl wahr) kleiner als die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit ist:

$$\underbrace{P_{n=200,\,p=0{,}97}}_{\dots\text{ obwohl } H_0 \text{ wahr}} \left(\underbrace{k \leq k_0}_{H_0 \text{ abgelehnt} \dots} \right) \leq 0{,}05$$

Mit dem Stochastik-Tafelwerk folgt $k_0 = 189$.
Die ER lautet also: H_0 ablehnen, falls Trefferzahl $k \leq 189$
Der β-Fehler hängt davon ab, welches p tatsächlich vorliegt. Ist z. B. $p = 0{,}95$, so ist der β-Fehler (die Telefongesellschaft für gut zu halten, obwohl sie es nicht ist):

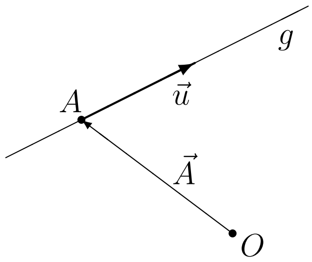
$$\begin{aligned} P_{n=200,\,p=0{,}95}(\text{„}H_0 \text{ nicht abgelehnt"}) &= P_{n=200,\,p=0{,}95}(k \geq k_0 + 1) = \\ &= 1 - P_{n=200,\,p=0{,}95}(k \leq 189) = 1 - 0{,}41693 \approx 0{,}58 \end{aligned}$$

Die Wahl der Nullhypothese hängt von der Interessenlage ab, d. h. welchen Fehler man als α-Fehler unter Kontrolle haben möchte. Im Zweifelsfall hat in Prüfungen der Angabentext Vorrang; sonst wählt man als H_0 das, was man mit Sicherheit ablehnen möchte, und als Alternative H_1 das, was man beweisen möchte.

12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Geradengleichungen — 05

Punkt-Richtungs-Form

Geraden sind gegeben durch einen Aufpunkt A (mit Ortsvektor $\vec{A}$) auf der Geraden und einen Richtungsvektor $\vec{u}$:

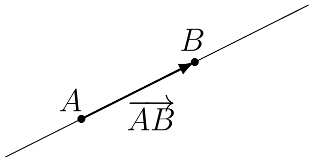


$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Interpretation: Die Gerade besteht aus allen Punkten $(x_1|x_2|x_3)$, deren Ortsvektor $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit einer Zahl λ als $\vec{A} + \lambda\vec{u}$ darstellbar ist)

Zwei-Punkte-Form

Gerade durch die Punkte A und B: Dann kann man z. B. A als Aufpunkt und $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ als Richtungsvektor wählen:



$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beispiel:
Gerade g durch $A(2|6|-1)$ und $B(-1|0|2)$:

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1- \;\; 2 \\ 0- \;\; 6 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Als Richtungsvektor kann auch ein Vielfaches gewählt werden, also z. B.:

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}.$$

Als Aufpunkt kann jeder andere Punkt auf der Geraden gewählt werden.

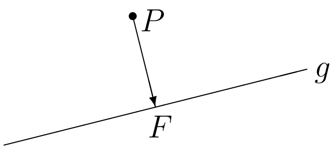
Lagebeziehung Punkt P – Gerade g

Ob P auf g liegt, wird durch Einsetzen des Punktes in die Geradengleichung entschieden.
Beispiel:

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- $P(5|12|-4)$ liegt auf g, denn: $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow \lambda = 3$
Probe: passt!
Probe: passt!
- $Q(1|4|3)$ liegt nicht auf g (siehe ueb125.pdf, Aufgabe 1)

Lotfußpunkt F eines Punktes P auf eine Gerade g; Abstand Punkt P – Gerade g



F als allgemeinen Geradenpunkt aufstellen; $\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}$, wobei $\vec{u}$ der Richtungsvektor der Geraden ist.
Der Abstand der Punktes P von der Geraden g ist dann der Abstand von P und F.

Beispiel:

$$P(1|-1|4),\ g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ansatz: Allgemeiner Geradenpunkt $F(7 + 2\lambda|2 + \lambda|-2 - 5\lambda)$.

$$\overrightarrow{PF} \perp \vec{u}: \begin{pmatrix} 7 + 2\lambda - 1 \\ 2 + \lambda - (-1) \\ -2 - 5\lambda - 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 0. \ (6 + 2\lambda) \cdot 2 + (3 + \lambda) + (-6 - 5\lambda) \cdot (-5) = 0.$$

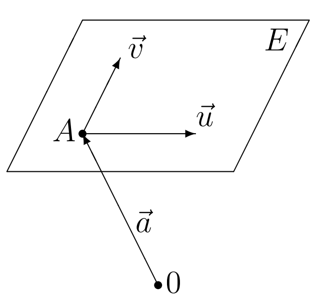
$45 + 30\lambda = 0$. $\lambda = -1{,}5$. Einsetzen in Ansatz für F liefert Lotfußpunkt $F(4|0{,}5|5{,}5)$.
Abstand des Punktes P von der Geraden g:

$$d(P, g) = \overline{PF} = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 2{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{13{,}5} \approx 3{,}67.$$

Ebenengleichungen

Parameterform

Ebenen sind gegeben durch einen Aufpunkt A (mit Ortsvektor $\vec{A}$) auf der Ebene und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:



$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ müssen linear unabhängig sein (d. h. müssen in verschiedene Richtungen zeigen, dürfen nicht Vielfache voneinander sein).[1]

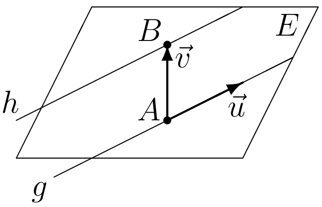
(Interpretation: Analog zu Geradengleichungen $\rightarrow$ grund125.pdf)

Fälle, in denen die Ebene E durch andere Stücke gegeben ist, führt man (eventuell mittels einer Skizze) auf die obige Punkt-Richtungs-Form zurück:

- E durch 3 Punkte A, B, C gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A}$.
- E durch Gerade $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und Punkt $P \notin g$ gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AP} = \vec{P} - \vec{A}$.
- E durch sich schneidende Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu\vec{v}$ gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
- E durch echt parallele Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu\vec{v}$ gegeben:
  Aufpunkt A, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$.

Beispiel:
Durch die echt parallelen Geraden

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



ist die Ebene

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Parameterfreie Form (Koordinatenform, Normalenform)

$\rightarrow$ grund127.pdf Normalenform

Lagebeziehung Punkt – Ebene

Ob ein Punkt auf einer Ebenen liegt, wird durch Einsetzen des Punktes in die Ebenengleichung entschieden. Dies geht besonders bequem mit der Normalenform.[2]

---

[1] Zwei linear abhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, bei denen ein Vektor sich als ein λ-faches des anderen darstellen lässt, heißen auch kollinear. Drei linear abhängige Vektoren liegen in einer Ebene und heißen auch komplanar.

[2] Mit der Parameterform ist dies analog zu Geraden $\rightarrow$ grund125.pdf möglich; dann muss man nach Einsetzen des Punktes aus zwei Gleichungen λ und μ bestimmen und die Probe in der dritten Gleichung machen.

12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Normalenform und HNF von Ebenen — 07

Normalenform (Koordinatenform, parameterfreie Form)
Eine Ebene kann gegeben sind durch einen Aufpunkt A und einen auf der Ebene senkrecht stehenden Normalvektor $\vec{n}$ und ist dann die Menge aller Punkte X mit $\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$, d. h. $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$, d. h. (nach Ausführung des Skalarprodukts) $n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_x) = 0$ bzw.

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - d = 0.$$

Bestimmung der Normalenform aus der Parameterform $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
Der Normalvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, also $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (→ grund114.pdf), wobei man auch ein Vielfaches als Normalvektor verwenden kann. Danach macht man den Ansatz $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und erhält d durch Einsetzen des Aufpunkts A.

Beispiel:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ansatz $11x_1 + x_2 - 5x_3 = d$. $A(1|2|1)$ einsetzen: $d = 11 + 2 - 5 = 8$. Also:
$E : 11x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$.

Interpretation: Die Ebene besteht aus allen Punkten $X(x_1, x_2, x_3)$, für die diese Gleichung gilt. Durch Einsetzen von Punktkoordinaten kann man also prüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Ebene liegt.

Besondere Lage: Ist $d = 0$, so liegt der Ursprung $(0|0|0)$ auf der Ebene.
Ist $n_1 = 0$ (z. B. $F : 2x_2 - x_3 = -2$), so ist die Ebene parallel zur x_1-Achse.

Lotvektor und Lotfußpunkt
Die Koeffizienten in der Normalenform bilden einen Lotvektor zur Ebene.

In den obigen Beispielen sind $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Normalenvektoren (also Vektoren, die auf der Ebene senkrecht stehen).

Um den Lotfußpunkt eines Punktes P auf einer Ebene E zu finden, stellt man die Lotgerade durch P mit Richtungsvektor $\vec{n}$ auf ($\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene E) und bestimmt den Schnittpunkt mit der Ebene (→ grund129.pdf).

Bestimmung der Hesseschen Normalenform (HNF)
Man bestimmt die Länge des Normalenvektors, dividiert die Ebenengleichung durch diesen Wert und löst die Gleichung nach 0 auf (bringt also die Konstante auf die linke Seite); erhält die Konstante dabei ein positives Vorzeichen, so multipliziert man die Gleichung mit -1.

Beispiel 1: $E : 11x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$. $|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11^2 + 1 + (-5)^2} = \sqrt{147}$. Die HNF lautet somit $\frac{1}{\sqrt{147}}(11x_1 + x_2 - 5x_3 - 8) = 0$.

Beispiel 2: Die HNF der Ebene $F : 2x_2 - x_3 = -2$ lautet $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_2 + x_3 - 2) = 0$.

Abstand Punkt – Ebene
Durch Einsetzen der Punktkoordinaten in der Term der HNF erhält man den Abstand des Punktes von der Ebene, wobei ein negatives Vorzeichen bedeutet, dass der Punkt im gleichen Halbraum wie der Ursprung $O(0|0|0)$ liegt (also auf der gleichen Seite der Ebene).
Beispiel:
Der Abstand des Punktes $P(3|-1|4)$ von der Ebene $E : \frac{1}{\sqrt{147}}(11x_1 + x_2 - 5x_3 - 8) = 0$ ist $d(P, E_1) = \frac{4}{\sqrt{35}}$, und P und O liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene. Der Abstand des Nullpunkts O ist $d(O, E_1) = \frac{8}{\sqrt{147}}$. Der Punkt $Q(4|4|8)$ liegt auf der Ebene E.

12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Lagebeziehungen Gerade – Gerade — 08

Richtungsvektoren parallel (d. h. Vielfache voneinander)?			
ja		nein	
Aufpunkt der einen Geraden in die andere einsetzen		Geraden gleichsetzen	
liegt drauf	liegt nicht drauf	eindeutige Lösung	Widerspruch
identisch	echt parallel	schneiden sich	windschief

Beispiele:

$$g_1 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad g_3 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ -0{,}6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Lagebeziehung von g_1 und g_2:
Die Richtungsvektoren sind nicht parallel. Falls nicht schon geschehen, müssen vor dem Gleichsetzen die Parameter verschiedene Bezeichnungen erhalten.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 1 + \lambda_1 = 4 + 2\lambda_2 \quad | \cdot (-4) \\ \text{II} & 2 + 4\lambda_1 = 4 + 3\lambda_2 \quad | \\ \text{III} & 1 + 3\lambda_1 = 8 + 5\lambda_2 \end{array}$$

Aus zwei Gleichungen (z. B. I und II) λ_1 und λ_2 berechnen:

$$-2 = -12 - 5\lambda_2; \quad \lambda_2 = -2$$

in I: $\lambda_1 = -1$
Probe mit der dritten (noch nicht verwendeten) Gleichung: $-2 = -2$ (stimmt).
Die Geraden schneiden sich.
Schnittpunkt: λ_1 in g_1 einsetzen (oder λ_2 in g_2): $S(0|-2|-2)$.

Lagebeziehung von g_2 und g_3:
Die Richtungsvektoren sind parallel, denn $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -0{,}2 \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ -0{,}6 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Aufpunkt von g_3 $(0{,}8|-0{,}8|0)$ in g_2 einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} 0{,}8 &= 4 + 2\lambda_2, \text{ also } \lambda_2 = -1{,}6 \\ -0{,}8 &= 4 + 3\lambda_2, \text{ Probe stimmt} \\ 0 &= 8 + 5\lambda_2, \text{ Probe stimmt.} \end{aligned}$$

Also sind g_2 und g_3 identische Geraden.

Schnittwinkel sich schneidender Geraden
Wenn sich zwei Geraden schneiden, so berechnet sich der Schnittwinkel aus den Richtungsvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ mit

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

Beispiel:
Für obige Geraden g_1, g_2 ist $\cos\varphi = \frac{1\cdot 2+4\cdot 3+3\cdot 5}{\sqrt{1+16+9}\cdot\sqrt{4+9+25}} \approx 0{,}9226$, also $\varphi \approx 22{,}69°$.

Geraden schneiden sich senkrecht, wenn sie sich schneiden und die Richtungsvektoren aufeinander senkrecht stehen (also deren Skalarprodukt $\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2 = 0$ ist).

Abstand paralleler Geraden
= Abstand des Aufpunkts der einen Geraden von der anderen Geraden ($\rightarrow$ grund125.pdf)

Abstand windschiefer Geraden
Ebenengleichung für die Ebene aufstellen, die g_1 enthält und zu g_2 parallel ist (also mit g_1 und Richtungsvektor $\vec{u}_2$), HNF aufstellen und Abstand des Aufpunkts der Geraden g_2 von dieser Ebene bestimmen.

12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Lagebeziehungen Gerade – Ebene — 09

Allgemeinen Geradenpunkt einsetzen in die Normalenform der Ebene		
Eindeutige Lösung	Typ $0 = 1$	Typ $0 = 0$
schneiden sich	echt parallel	Gerade liegt in der Ebene

Beispiel:

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad E : 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 60$$

Allgemeiner Geradenpunkt $G(2 + \lambda|1| - 3\lambda)$ in E: $15(2 + \lambda) + 12 \cdot 1 + 20 \cdot (-3\lambda) = 60$; $\lambda = -0{,}4$; g und E schneiden sich.
Schnittpunkt: λ in G einsetzen: $S(1{,}6|1|1{,}2)$.

Schnittwinkel von Gerade und Ebene
Falls sich Gerade und Ebene schneiden, so berechnet man den Schnittwinkel aus dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden und dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene mit

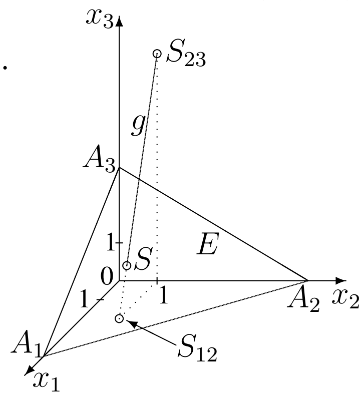
$$\sin\psi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

Beispiel: Für die obigen g, E ergibt sich $\sin\psi = \frac{|1 \cdot 15 + 0 \cdot 12 + (-3) \cdot 20|}{\sqrt{1 + 0 + 9} \cdot \sqrt{225 + 144 + 400}} \approx 0{,}51316$, also $\psi \approx 30{,}87°$.

Besondere Lage
- Gerade und Ebene schneiden sich senkrecht, wenn der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene parallel (also Vielfache voneinander) sind.
- Ist $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$, so sind Gerade und Ebene parallel (echt parallel oder zusammenfallend, kann entschieden werden durch Einsetzen des Aufpunkts der Geraden in die Ebene).

Abstand einer parallelen Gerade von einer Ebene
HNF der Ebene aufstellen; Abstand des Aufpunkts der Gerade von der Ebene bestimmen.

Achsenpunkte einer Ebene, Spurgeraden
Für Zeichnungen können die Achsenpunkte (Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen) und Spurgerade (Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen) nützlich sein.
Achsenpunkt mit der x_1-Achse: Punkte auf der x_1-Achse sind von der Bauart $A_1(x_1|0|0)$, Einsetzen in die Normalenform liefert x_1.



Für obige Ebene E ergibt sich: $A_1(4|0|0)$, $A_2(0|5|0)$, $A_3(0|0|3)$.
Spurgeraden können meist (→ ueb129.pdf) berechnet werden als Verbindungsgeraden der Achsenpunkte.
Für obige Ebene E ergibt sich z. B. als Spurgerade mit der x_1x_2-Ebene: $A_1A_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Spurpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen
ergeben sich als Schnittpunkte mit den Ebenen $x_3 = 0$ (x_1x_2-Ebene) usw. durch Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts.
Für obige Gerade g ergibt sich:
Mit x_1x_2-Ebene: G in $x_3 = 0$: $-3\lambda = 0$, $\lambda = 0$, also $S_{12}(2|1|0)$.
Mit x_1x_3-Ebene: G in $x_2 = 0$: $1 = 0$, kein Schnitt mit der x_1x_3-Ebene, g ist parallel dazu.
Mit x_2x_3-Ebene: G in $x_1 = 0$: $2 + \lambda = 0$, $\lambda = -2$, also $S_{23}(0|1|6)$.

Lot fällen (d. h. Punkt P auf Ebene E projizieren), P an E spiegeln → ueb129.pdf.

Lotfußpunkt eines Punktes P auf eine Gerade g → ueb129.pdf.

12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Lagebeziehungen Ebene – Ebene — 10

Betrachte Ebenengleichungen in Normalenform		
Gleichungen identisch (d. h. bis auf einen Faktor)	Normalenvektor parallel, aber Gleichungen nicht identisch	Normalenvektor nicht parallel
identisch	echt parallel	schneiden sich

Beispiele:

1. $E: 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$ und $F_1: -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 34 = 0$ sind identisch.
2. $E: 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$ und $F_2: -4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = -12$ sind echt parallel.
3. $E: 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 17$ und $F_3: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4$ schneiden sich.
   Zur Bestimmung der Schnittgerade eliminiert man (wenn nicht schon eine solche Gleichung vorliegt) eine Variable:
   $$\begin{array}{rrcl} E: & 2x_1 + x_2 - 5x_3 &=& 17 \quad |\cdot 2 \\ F_3: & x_1 - 2x_2 + 2x_3 &=& -4 \quad | \\ \hline (*) & 5x_1 \qquad - 8x_3 &=& 30 \end{array}$$
   Da es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem handelt (2 Gleichungen für 3 Variable), bedeutet die fehlende dritte Gleichung, dass man meist (→ ueb120.pdf, Aufgabe 3e) eine Variable frei wählen kann, d. h. man hat nun einen „Wunsch“ frei in Form eines Parameters, z. B.
   $$\begin{array}{rrcl} & x_3 &=& \lambda \\ \text{in } (*): & x_1 &=& 6 + \frac{8}{5}\lambda \\ \text{in } E: & x_2 &=& 17 - 2x_1 + 5x_3 = 17 - 2(6 + \frac{8}{5}\lambda) + 5\lambda = 5 + \frac{9}{5}\lambda \end{array}$$
   Die Schnittgerade lautet damit:
   $$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder etwas schöner} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel sich schneidender Ebenen
Falls sich die Ebenen schneiden, so berechnet man den Schnittwinkel aus den Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{n}'$ mit
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$
Beispiel:
Für die Ebenen E und F_3 aus obigem Beispiel 3 ist $\cos\varphi = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + (-5)\cdot 2|}{\sqrt{4+1+25}\cdot\sqrt{1+4+4}} \approx 0{,}6086$, also $\varphi \approx 52{,}51°$.

Ebenen schneiden sich senkrecht, wenn die Normalenvektoren aufeinander senkrecht stehen (also deren Skalarprodukt $\vec{n} \circ \vec{n}' = 0$ ist).

Abstand paralleler Ebenen
HNF einer Ebene bestimmen; beliebigen Punkt auf der anderen Ebene wählen (z. B. zwei Koordinaten beliebig, dritte aus der Ebenengleichung berechnen) und dessen Abstand von der anderen Ebene ermitteln.

Beispiel (mit den Ebenen E und F_2 aus obigem Beispiel 2):
Bestimmung der HNF von E: $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$. Also HNF von E: $\frac{1}{\sqrt{30}}(2x_1 + x_2 - 5x_3 - 17) = 0$.
Beliebiger Punkt auf F_2, z. B. mit $(?|0|0)$: $(3|0|0)$. Einsetzen in den Term der HNF liefert den Abstand $d(E, F_2) = |\frac{1}{\sqrt{30}}(6 - 17)| = \frac{11}{\sqrt{30}}$.

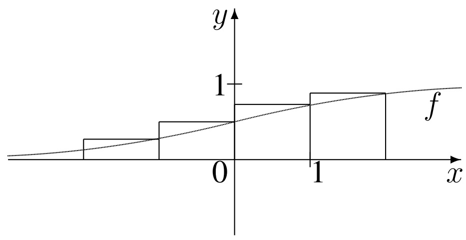
12. Klasse TOP 10 Grundwissen 12
Kernsätze K

Blatt auf DIN A 3 vergrößern, Karteikarten ausschneiden und Rückseite an Rückseite zusammenkleben!

Integration 121 Wie berechnet man Integrale, z. B. $\int_{-1}^{2}(4x-7)dx$? Wie ist ein solches Integral zu deuten? Wie berechnet man die Fläche A zwischen zwei Kurven?	**Wendepunkte, Integralfkten** 122 Wie untersucht man eine Funktion auf Wendepunkte? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?	$E(X)$, **Binomialverteilung** 123 Wie berechnet man allgemein Erwartungswerte? Für Binomalvert./Bernoullikette: $E(X)=?$, $V(X)=?$, $P_{n=50,p=0{,}85}(X=48)=?$, $P_{n=50,p=0{,}85}(X\geq 48)=?$	**Testen von Hypothesen** 124 Welche Vorgehensweise liegt bei Hypothesentests meist vor, z. B.: Die Vermutung „Trefferw. $p>0{,}85$“ soll auf 1 %-Niveau hochsignifikant „bewiesen“ werden bei Stichprobenlänge $n=50$	**Geradengleichungen** 125 Wie sind im Raum Geraden g gegeben? Wie die Gerade durch zwei Punkte A,B? Wie prüft man, ob P auf g liegt? Wie berechnet man den Abstand eines Punktes von einer Geraden?
L121 Stammfunktion F (also mit $F'=f$) auswerten „Ober- minus Untergrenze“, z. B. $\int_{-1}^{2}(4x-7)dx=[2x^2-7x]_{-1}^{2}=-6-8=-14$. Flächenbilanz der ober-/unterhalb der x-Achse liegenden Flächen. A: „Ober- minus Unterkurve“.	L122 $f''(x)=0$ lösen und Vorzeichenbereiche betrachten ($f''>0$: linksgekrümmt), Stelle mit Krümmungswechsel ist WP. HdI: Die Ableitung der Integralfunktion $I(x)=\int_a^x f(t)dt$ ergibt den Integranden: $I'=f$.	L123 $E(X)=$„Summe Wert x_i mal W. $P(X=x_i)$“ ($\rightarrow$ Merkhilfe). Bin.vert.: $E(X)=np, V(X)=npq$, $P_{\ldots}(X=48)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=$ $=\binom{50}{48}0{,}85^{48}0{,}15^2=0{,}01128$, $P_{\ldots}(X\geq 48)=1-P_{\ldots}(X\leq 47)=$ $=1-0{,}9858=0{,}0142$ ($\rightarrow$ Tafel).	L124 $H_0: p\leq 0{,}85$, $H_1: p>0{,}85$ Entscheidungsregel: H_0 ablehnen, falls Trefferzahl $k\geq k_0$. k_0 wird so bestimmt, dass $\alpha=P_{H_0}(H_0$ abgelehnt$)=$ $=P_{n=50,p=0{,}85}(k\geq k_0)\leq 0{,}01$ (Stochastik-Tafel hier $\rightarrow k_0=49$).	L125 $g:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\vec{u}$ mit Aufpunkt A und Richtungsvektor $\vec{u}$, $AB:\vec{X}=\vec{A}+\lambda(\vec{B}-\vec{A})$. P einsetzen, drei Gleichungen für gleiches λ. Fußpunkt als allg. Geradenpunkt ansetzen, $\overrightarrow{PF}\circ\vec{u}=0$.
Ebenengleichungen 126 Wie sind Ebenen in Parameterform gegeben? Wie stellt man eine Ebene durch drei Punkte A,B,C auf?	**Ebenen-Normalenform und HNF** 127 Wie berechnet man aus $E:\vec{X}=\vec{A}+\lambda u+\mu\vec{v}$ die Normalenform $E: n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=d$? Wie fällt man ein Lot von P auf E? Wie bestimmt man Hesse-Normalform und Abstand $d(P,E)$?	**Lagebeziehung Gerade – Gerade** 128 Wie bestimmt man die gegenseitige Lage zweier Geraden? Wie gegebenenfalls den Schnittwinkel φ?	**Lagebeziehung Gerade – Ebene** 129 Wie bestimmt man die gegenseitige Lage Gerade g – Ebene E? Wie ggf. den Schnittwinkel ψ? Von welcher „Bauart“ sind Achsenpunkte z. B. auf der x_3-Achse? Welche Gl. hat die x_2x_3-Ebene?	**Lagebeziehung Ebene – Ebene** 120 Wie erkennt man die gegenseitige Lage zweier Ebenen? Wie bestimmt man gegebenenfalls die Schnittgerade s und den Schnittwinkel φ?
L126 Aufpunkt A und zwei Richtungsvektoren $\vec{u},\vec{v}$: $E:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$. Drei-Punkte-Gleichung: $E:\vec{X}=\vec{A}+\lambda(\vec{B}-\vec{A})+\mu(\vec{C}-\vec{A})$.	L127 Normalvektor $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$, Ansatz $n_1x_1+\ldots=d$, A einsetzen $\rightarrow d$. Lotgerade (Aufpunkt P, Richtungsvektor $\vec{n}$) mit E schneiden. HNF: Ebenengl. durch $\pm\vert\vec{n}\vert$ teilen, $d(P,E)$: Punkt in Term der HNF einsetzen.	L128 Richtungsvektoren parallel? • Falls ja: Aufpunkt der einen Geraden in die andere einsetzen $\rightarrow$ identisch oder echt parallel. • Falls nein: Gleichsetzen $\rightarrow$ Schnittpunkt oder windschief. $\cos\varphi=\frac{\vert\vec{u}\circ\vec{v}\vert}{\vert\vec{u}\vert\cdot\vert\vec{v}\vert}$.	L129 Allg. Geradenpunkt in E einsetzen $\rightarrow$ schneiden sich („$\lambda=\ldots$“) bzw. Gerade in der Ebene („$0=0$“) bzw. echt parallel („$1=0$“). $\sin\psi=\frac{\vert\vec{u}\circ\vec{n}\vert}{\vert\vec{u}\vert\cdot\vert\vec{n}\vert}$. $A_3(0\vert 0\vert x_3)$. x_2x_3-Ebene: $x_1=0$.	L120 Normalvektoren parallel? $\rightarrow$ Ebenen identisch oder echt parallel oder sich schneidend. s: Unterbest. Gl.system lösen (eine Variable „freier Wunsch“ λ, andere durch λ ausdrücken). $\cos\varphi=\frac{\vert\vec{n}_1\circ\vec{n}_2\vert}{\vert\vec{n}_1\vert\cdot\vert\vec{n}_2\vert}$.

12. Klasse Übungsaufgaben	**12**
Integration	**01**

1. Gegeben ist $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ mit dem nebenstehenden Graphen.



   (a) Berechnen Sie für $A = \int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$ eine Abschätzung nach oben, indem Sie wie in der Abbildung die Streifenflächen berechnen und summieren.

   (b) Berechnen Sie den exakten Wert von A (beachten Sie: Der Zähler ist Ableitung des Nenners, also $f(x)$ von der Bauart $\frac{N'(x)}{N(x)}$).
   Um wie viel % weicht die Abschätzung aus Teilaufgabe (a) hiervon ab?

   (c) Die Verkaufszahlen eines bestimmten Autotyps (in 100 000 Stück) im Jahre x (Markteinführung vor zwei Jahren: $x = -2$) werden modellhaft durch die Funktion f beschrieben.

   Welche Bedeutung haben dann $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$ in diesem Kontext?

2. Skizzieren Sie die Graphen zu den Funktionen mit $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)x^2$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x^2-4)$ und berechnen Sie

   (a) den Inhalt A_1 der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird;

   (b) den Inhalt A_2 der Fläche zwischen den Graphen von f und g;

   (c) $A_3 = \int\limits_{1}^{2{,}5} f(x)dx$ und deuten Sie das Vorzeichen hiervon;

   (d) den Inhalt A_4 der Fläche, die von der Tangente an g im Punkt $(-3|2{,}5)$, der x-Achse und dem Graphen von g eingeschlossen wird;

   (e) b so, dass $\int\limits_{0}^{b} g(x)dx = 0$ und deuten Sie die Ergebnisse.

3. Berechnen Sie:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x^3-x-5}{x^2}dx$

   (b) $\int\limits_{0}^{4}(6\sqrt[3]{x}-5)dx$

   (c) $\int\limits_{0}^{1} x\cdot e^{x^2}dx$

12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Wendepunkte, Integralfunktionen — 02

Anwendungsaufgaben siehe ueb121.pdf, Aufgabe 1 (c), ueb117.pdf, Aufgabe 4, grund110.pdf (Optimierungsaufgabe) und ueb103.pdf, Aufgabe 2.

1. Zu betrachten ist die Integralfunktion $I(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

   Berechnen Sie den Term von $I(x)$.

   Zeigen Sie: $I(0) < 0$ (obwohl $\cos t \geq 0$ für $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$). Formulieren Sie eine Begründung für diese Beobachtung.

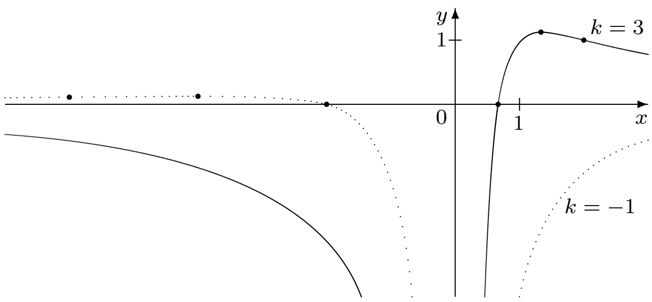
2. (a) Untersuchen Sie $f(x) = 2x^4 - x$ auf Extrema und Wendepunkte (x-Werte und Art genügen jeweils).

   (b) Untersuchen Sie $f(x) = -x^4 + 2x^3$ auf Extrema (x-Werte und Art genügen) und Wendepunkte. Zeigen Sie, dass bei $x = 1$ ein Wendepunkt vorliegt, und berechnen Sie die Wendetangente in diesem Punkt.

   (c) Untersuchen Sie $f(x) = x^4$ auf Extrema und Wendepunkte.

3. Bestimmen Sie für $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ (siehe auch ueb116.pdf/Aufgabe 5) die Lage des Wendepunkts.

4. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \dfrac{kx - 2}{x^2}$. Das Schaubild zeigt die Graphen für $k = 3$ und $k = -1$.



   Bestimmen Sie die Lage des Wendepunkts in Abhängigkeit vom Parameter k.

   Überzeugen Sie sich davon, dass sich für $k = 3$ die in der Abbildung gezeigte Lage des Wendepunktes ergibt.

5. Berechnen Sie den Term einer achsensymmetrischen Funktion 4. Grades, deren Wendepunkt bei $x = 1$ liegt, wobei der Wendepunkt zugleich Nullstelle ist und darin die Steigung 2 hat.

6. Zeigen Sie: $I(x) = x \cdot \ln \frac{x+3}{2x} + 3\ln(x+3) - 7\ln 2$ ist der Term der Integralfunktion $I(x) = \int\limits_{1}^{x} \ln \frac{t+3}{2t} dt$.

   Der Integrand $f(t) = \ln \frac{t+3}{2t}$ hat die Nullstelle $x = 3$. Was folgt daraus für den Graphen von I?

12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Erwartungswert, Binomialverteilung — 03

1. Erklären Sie anschaulich die Bedeutung von $\binom{n}{k}$ in der $B(n; p; k)$-Formel.
2. Beim Lotto 6 aus 49 befinden sich 49 Kugeln in der Lostrommel, aus denen 6 ohne Zurücklegen gezogen werden.
   (a) Der Spielteilnehmer hat vor der Ziehung 6 Zahlen auf dem Spielschein angekreuzt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (W.), dass sich unter den 6 gezogenen Kugeln genau 4 vorher angekreuzte befinden.
   (b) Wie viele Möglichkeiten für die Ziehung 6 aus 49 gäbe es, wenn die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, von Interesse wäre?

3. Eine Maschine soll Papier auf eine bestimmte Länge zuschneiden. Das Schneidewerkzeug liefert nur zu 80 % korrekt geschnittene Blätter. Das Experiment soll als Bernoulli-Kette betrachtet werden.
   (a) Erscheint Ihnen die hierfür nötige Unabhängigkeitsannahme gerechtfertigt?
   (b) Geben Sie die W. an, dass sich unter 100 Blättern • mindestens 98 • höchstens 90 • mindestens 90 • mindestens 70 und höchstens 90 einwandfreie befinden.
   (c) Das Schneidewerkzeug wird ausgetauscht, wenn unter 50 Blättern weniger als $k_0 = 45$ einwandfreie sich befinden. Wie groß ist die W. für einen Austausch?
   Wie muss die Zahl k_0 geändert werden, damit die Austausch-Wahrscheinlichkeit mindestens 99 % beträgt?
   (d) Beim Zuschnitt entsteht — auf ganze mm gerundet — zu 3 % die Papierlänge 295 mm, zu 18 % die Länge 296 mm, zu 45 % 297 mm, zu 22 % 298 mm, zu 7 % 299 mm und zu 5 % 300 mm. Berechnen Sie Erwartungswert und Streuung.

4. In einer Klasse mit 25 Jugendlichen (davon 11 Mädchen) geben je 4 Buben und Mädchen an, für das Studium bereits Geld zu sparen.
   (a) Es wird eine Person zufällig ausgewählt. Mit welcher W. handelt es sich um ein Mädchen, wenn die ausgewählte Person zur Gruppe der „Sparer“ gehört?
   (b) Nun werden nacheinander 4 Schüler zufällig ausgewählt. Zu betrachten ist das Ereignis „Es wird genau ein Sparer ausgewählt“. Zeigen Sie, dass sich die W. für Ziehen ohne bzw. mit Zurücklegen um mehr als 2 Prozentpunkte unterscheiden.
   Warum ist der Unterschied bei Ziehen aus einer großen Personenzahl geringer?

   Im Folgenden soll im Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ gerechnet werden.
   (c) Wie groß ist die W., dass • frühestens die vierte gezogene Person weiblich ist,
   • spätestens die vierte gezogene Person weiblich ist,
   • die vierte gezogene Person die zweite weibliche ist?
   (d) Berechnen Sie, wie oft das Experiment „Auswahl einer Person“ durchgeführt werden muss, um mit mehr als 99 % W. mind. einen männl. Sparer zu ziehen.
   (e) Nun wird aus 200 Personen mit gleichen prozentualen Anteilen wie in der Schulklasse gezogen. Wie groß ist die Zahl μ der zu erwartenden männlichen Nichtsparer? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau diese Anzahl? Wie groß ist die Streuung σ für diese Anzahl? Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich die Zahl der gezogenen männlichen Nichtsparer im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$?

12. Klasse Übungsaufgaben — 12

Testen von Hypothesen — 04

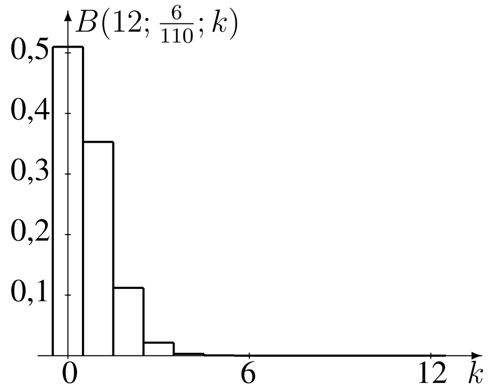
1. Eine politische Partei möchte bei der nächsten Wahl die 5 %-Hürde überspringen. Wie sollte (auf 1 %-Signifikanzniveau) aufgrund einer Umfrage unter 200 Wahlberechtigten entschieden werden, ob noch Wahlkampf hierfür betrieben werden soll?

2. In einem Kinderspiel wird aus den Ziffern „123456" jeweils die gewürfelte Ziffer ausgestrichen. Nikola vermutet, da nach 1000 solchen Spielen nur bei wenigen bereits nach dem sechsten Wurf alle Ziffern gestrichen waren, der verwendete Würfel biete nur eine geringe Chance für ein Sechs-Wurf-Spiel. Erstellen Sie einen entsprechenden Test auf 5 %-Niveau für Nikolas Vermutung ($= H_1$/ H_0: Laplace-Würfel).

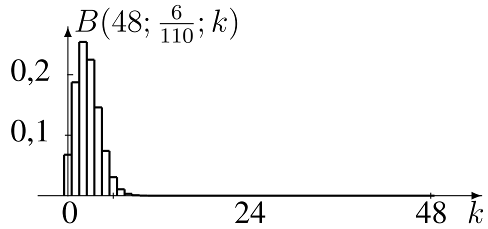
k	$\sum\limits_{i=0}^{k} B(1000; \frac{120}{7776}; i)$
	...
7	0,0135
8	0,0289
9	0,0557
	...
21	0,9344
22	0,9588
	...

3. Ein Hersteller, der in eine große Ladung Natursteinplatten unterschiedliche Anteile 1. Wahl und 2. Wahl mischt, möchte die Verärgerung anspruchsvoller Kunden, die mehr als 70 % 1. Wahl erwarten, vermeiden und führt mit einer Stichprobe von 50 Stück einen entsprechenden Hypothesentest durch.
   (a) Begründen Sie Ihre Wahl von Nullhypothese und Alternative.
   (b) Stellen Sie die Entscheidungsregel (ER) für einen Test auf Niveau 5 % auf.
   (c) Wie ist bei dieser ER zu entscheiden, wenn 20 % der Stichprobe 2. Wahl waren?
   (d) Wie groß ist bei dieser ER das Risiko des Herstellers, eine Lieferung irrtümlich nicht für gut zu halten, obwohl tatsächlich 85 % der Steine 1. Wahl sind?

4. In einer Gewinnshow behauptet ein Kandidat, anhand des unterschiedlichen Abnutzungsgrads der Spielkarten aus einem Rommé-Blatt (110 Karten, davon 6 Joker) mit 50 % Treffsicherheit blind eine Karte auszuwählen, bei der es sich um einen Joker handelt. Er hat mit einem jeweils neuen Kartenstapel 12 Versuche, von denen er mindestens 2mal ein Joker herausziehen muss.



   (a) Berechnen Sie gemäß dem Grundsatz „in dubio pro reo" mit Hilfe des hier abgebildeten Histogramms der $B(n;p)$-Verteilung bzw. mit entsprechenden Formeln α- und β-Fehler.
   (b) Wie müsste die Entscheidungsregel für einen Test auf 10 %-Niveau für $n = 48$ Versuche gewählt werden?
   (c) Warum ist im Histogramm zu $n = 48$ der Berg schmäler als im ersten?
   (d) Welche Möglichkeit ergibt sich daraus, gleichzeitig α- und β-Fehler zu verkleinern?



12. Klasse Übungsaufgaben 12
Geradengleichungen 05

1. Gegeben ist die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

   Prüfen Sie, ob die folgenden Punkte auf g liegen:

   $Q(1|4|3)$, $R(0|2|1)$, $S(5|0|2)$.

   Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes T auf g mit $T(?|?|0)$.

2. Zeigen Sie, dass die Punkte $A(-2|-2|8)$, $B(4|4|4)$, $C(2|2|\frac{16}{3})$ und $D(-17|-17|18)$ auf einer Geraden liegen, indem Sie die Gleichung der Geraden AB aufstellen und zeigen, dass C und D auf AB liegen.

3. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $D(2{,}5|-0{,}5|1)$ von der Geraden AB durch $A(-1|-1|1)$ und $B(2|-2|1)$ und berechnen Sie damit die Fläche des Dreiecks ABD. Vergleichen Sie mit dem Vektorprodukt-Ergebnis (vgl. grund119.pdf).

4. Welche besondere Lage haben folgende Geraden im Koordinatensystem:

   (a) $g : \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) $h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$.

5. Gegeben ist die Schar der Punkte $P_a(a|14|12-3a)$ mit dem reellen Parameter a.

   (a) Geben Sie in Punkt-Richtungsform die Gleichung der Geraden g an, auf der alle Punkte P_a liegen.

   (b) Welche Lage haben die Punkte $P_{0,5}$, P_0 und P_1 zueinander?
   Welche Lage haben die Punkte P_{-1}, P_0 und P_1 zueinander?

6. (a) Gegeben ist die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}$.

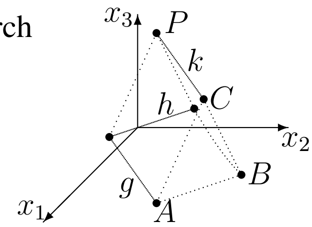
   Wie lautet die Gleichung der Geraden p, die durch senkrechte Projektion von g in die x_1x_2-Grundebene entsteht?

   (b) Nun werde im zweidimensionalen Raum die Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 2{,}5$ betrachtet. Wie könnte diese Gerade in Punkt-Richtungsform beschrieben werden?

12. Klasse Übungsaufgaben — 12

Ebenengleichungen — 06

1. Das nebenstehende am Hang stehende Zelt ist gegeben durch $A(8|5|0)$, $B(5|8|0)$, $C(7|7|5)$, $P(2|2|6)$ sowie die Geraden

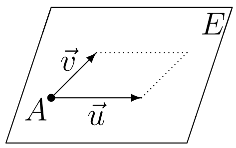


$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}, \text{ und } k : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie Ebenengleichungen in Parameterform auf:
   (a) Ebene E_1, die durch die Punkte A, B, C gegeben ist.
   (b) Ebene E_2, die durch die Gerade k und den Punkt B festgelegt ist. Überzeugen Sie sich zuvor davon, dass der Punkt B nicht auf der Geraden k liegt.
   (c) Ebene E_3, die durch die beiden echt parallelen Geraden g und k festgelegt ist.
   (d) Ebene E_4, die durch die sich schneidenden Geraden g und h festgelegt ist.

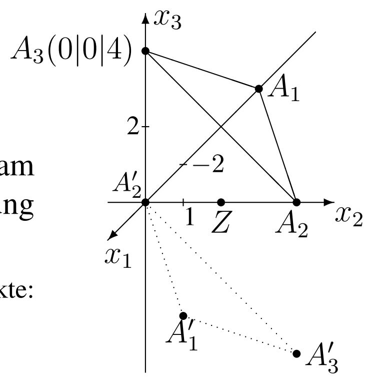
2. Gegeben sind der Punkt $A(2|-3|1)$ und die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Warum ist $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, keine Ebene?
   (b) Betrachten Sie nun die Ebene E mit Aufpunkt A und Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$.
   Wenn man für die Parameter nur Zahlen aus dem Intervall $[0; 1]$ zulässt, also $\lambda, \mu \in [0; 1]$, so erreicht man nur Punkte im nebenstehend dargestellten, von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramm.



   Zeigen Sie durch Einsetzen in die Parameterform, dass $P(1|-4|3)$ zwar auf der Ebene, aber nicht im eben genannten Parallelogramm liegt.

3. Gegeben sind die Punkte $A(3|0|3)$, $B(6|16|5)$, $C(0|4|5)$ und $D(4|-3|2)$.
   Warum kann man mit dem sog. Spatprodukt (→ grund119.pdf) $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD}$ prüfen, ob die Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen?
   Was bedeutet dies im Fall der hier gegebenen Punkte für die lineare (Un-?)Abhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$?

4. Gegeben ist die hier dargestellte Ebene E.



   (a) Geben Sie eine Gleichung von E an.
   (b) Spiegeln Sie die Punkte $A_1(-6|0|0)$, A_2, A_3 am Punkt $Z(0|2|0)$ und stellen Sie damit die Gleichung der gespiegelten Ebene E' auf.
   Tipp: Mögliche Vorgehensweise zum Spiegeln der Punkte: $\overrightarrow{ZA'_1} = \overrightarrow{A_1Z}$ mit „Spitze minus Fuß" nach $\vec{A'_1}$ auflösen.

12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Normalenform und HNF von Ebenen — 07

1. Bestimmen Sie jeweils eine Normalform der folgenden Ebenen
   (a) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   (b) $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   (c) $E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   (d) Welche besondere Lage liegt jeweils vor?
   (e) Alternativ zum Vektorprodukt ist auch eine Umwandlung von der Parameter- in die parameterfreie Normalform möglich durch Eliminieren der Parameter.
   Beispiel mit der Ebene E aus grund127.pdf:
   $$\begin{array}{rcll} x_1 & = & 1 + \lambda + 2\mu & |\cdot(-4) \quad |\cdot(-3) \\ x_2 & = & 2 + 4\lambda + 3\mu & | \\ \underline{x_3} & \underline{=} & \underline{1 + 3\lambda + 5\mu} & \underline{\qquad\qquad |\quad} \\ -4x_1 + x_2 & = & -2 \quad - 5\mu & | \\ \underline{-\,3x_1 + x_3} & \underline{=} & \underline{-2 \quad - \mu} & \underline{|\cdot(-5)} \\ E : 11x_1 + x_2 - 5x_3 & = & 8 & \end{array}$$
   Relativ schnell geht dies bei den Ebenen aus den Teilaufgaben (b) und (c); führen Sie dies aus!
   (f) Lohnend ist die Methode aus Teilaufgabe (e) auch bei der Umwandlung von Geraden im $\mathbb{R}^2$. Bringen Sie auf diese Weise die Gerade $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf die Form $x_2 = mx_1 + t$.

2. Stellen Sie die Lotgerade auf die Ebene $E : 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 24$ durch den Punkt $P(1|1|-1)$ auf. Zeigen Sie, dass P nicht auf E liegt.

3. Schreiben Sie die Ebene $E : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = 0$ in der Form $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und zeigen Sie dann, dass $P(1|-4|6)$ auf E liegt.

4. Gegeben sind die Ebenen $E : 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 14$ und $F : -x_1 + 4x_2 + x_3 = -12$.
   (a) Berechnen Sie jeweils die Hesse-Normalform (HNF)!
   (b) Liegt der Punkt $P(4|2|-6)$ näher an E oder an F?
   (c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte $(0|0|x_3)$ auf der x_3-Achse, die Abstand 10 von der Ebene E haben.
   (d) Welchen Gleichung hat eine Kugel um $M(9|7|6)$, die die Ebene E genau berührt? Falls die Kugel k um M den Radius 13 hat, welchen Radius hat dann der Schnittkreis mit der Ebene E?

12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Lagebeziehung Gerade – Gerade — 08

1. Weisen Sie die Lagebeziehung für die Geraden aus grund126.pdf nach:
$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Gegeben sind die Geraden aus ueb126.pdf, Aufgabe 1:
$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

   (a) Warum kann man die Lagebeziehung von g und h schnell sehen?

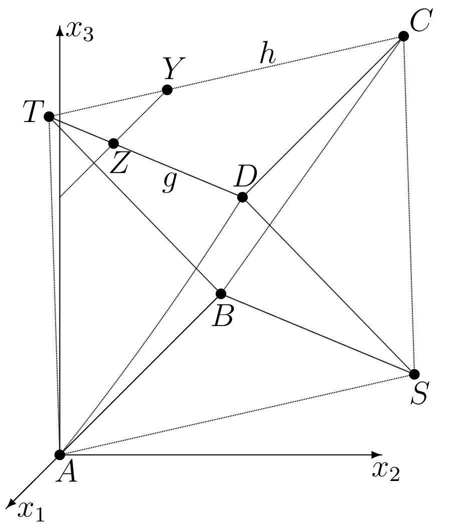
   (b) Weisen Sie die Lagebeziehung von g und k nach.

3. Gegeben sind die Geraden $g_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
$g_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $g_4: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$.
Untersuchen Sie jeweils die Lagebeziehung:

   (a) g_1 und g_2; (b) g_2 und g_3; (c) g_3 und g_4; (d) g_1 und g_4;

   falls sich die Geraden schneiden, bestimmen Sie auch den Schnittwinkel; falls die Geraden parallel sind, bestimmen Sie auch den Abstand.

4. Gegeben ist das nebenstehende Oktaeder durch $A(0|0|0)$, $B(-6|0|0)$, $C(-6|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $D(0|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$ und $S(-3|3\sqrt{3}|0)$.

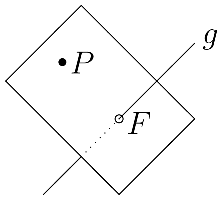


   (a) T ist der Schnittpunkt der Geraden g und h, wobei g eine Parallele zu BS durch D ist und h eine Parallele zu AS durch C ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von T.

   (b) Die im Bild gezeigte Gerade hat die Gleichung $YZ: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.
   Zeigen Sie, dass die Gerade YZ und die x_3-Achse sich schneiden.

   Ergänzender Hinweis: Der Abstand der windschiefen Geraden AS und g kann hier leicht bestimmt werden, da AS in der Ebene $x_3 = 0$ und g in der parallelen Ebene $x_3 = 2\sqrt{6}$ liegt. Der Abstand der beiden windschiefen Geraden ist also $2\sqrt{6}$.

12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Lagebeziehung Gerade – Ebene — 09

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und der gegebenen Ebene; falls sie sich schneiden, berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel, falls sie echt parallel sind, den Abstand $d(g, E)$.
   (a) $E : x_1 - x_2 - 5x_3 = 26$
   (b) $E : 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 8 = 0$
   (c) $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$
2. Gegeben sind die Ebene $E : 4x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 3$ und mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$ die Schar der Geraden $g_k : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$. Für welchen Wert des Parameters k sind E und g_k (a) parallel, (b) senkrecht zueinander?
3. Gegeben sind $s : \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, sowie $E_1 : x_1 + 2x_3 = 4$ und $E_2 : 3x_1 - 4x_2 = 0$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Gerade s in beiden Ebenen E_1 und E_2 enthalten ist und somit die Schnittgerade darstellt.
   (b) Berechnen Sie für die Ebenen die Achsenpunkte und die Gleichungen der Spurgeraden und für die Gerade die Spurpunkte. Zeichnen Sie die Ebenen und die Gerade in ein Koordinatensystem.
4. **Lot fällen (d. h. Punkt P auf Ebene projizieren), Punkt an Ebene spiegeln**
   Aus grund127.pdf ist folgende Vorgehensweise bekannt: Mit Aufpunkt P und Richtungsvektor = Normalenvektor der Ebene stellt man die Gleichung der Lotgeraden auf und schneidet sie mit der Ebene.
   Beispiel: Lot vom Punkt $P(-1|-2{,}4|-2{,}5)$ auf $E : 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 = 60$:
   Lotgerade $l : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2{,}4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ in E: $15(-1+15\tau)+12(-2{,}4+12\tau)+20(-2{,}5+20\tau) = 60$, $\tau = 0{,}2$, also Fußpunkt $F(2|0|1{,}5)$.
   Spiegelpunkt P': $\overrightarrow{FP'} = \overrightarrow{PF}$, also $\vec{P'} - \vec{F} = \vec{F} - \vec{P}$, also $\vec{P'} = 2\vec{F} - \vec{P}$, hier also $P'(5|2{,}4|5{,}5)$.
   Berechnen Sie ebenso Lotfußpunkt und P' für $P(9|2|-5)$ und $E : x_1 - 3x_3 = 4$.
5. **Lotfußpunkt eines Punktes P auf eine Gerade g**
   Zur Bestimmung des Abstands eines Punktes P von einer Geraden g kann anstelle des Verfahrens von grund125.pdf auch durch den Punkt P eine Ebene senkrecht zu g aufgestellt werden und die Gerade g mit dieser Ebene geschnitten werden.
   

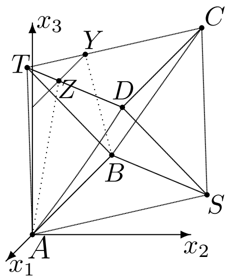
   Beispiel: $P(1|-1|4)$ und g_1 aus Aufgabe 2.
   Ansatz für $E : 2x_1 + x_2 - 5x_3 = d$. Einsetzen von P liefert $d = 2 - 1 - 20 = -19$.
   g_1 in E eingesetzt: $2 \cdot (7 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - 5(-2 - 5\lambda) = -19$; $\lambda = -1{,}5$.
   λ in g_1 liefert $F(4|0{,}5|5{,}5)$ und damit Abstand $\overline{PF} = \sqrt{13{,}5}$ wie in grund125.pdf.
   Berechnen Sie so den Abstand des Punktes $P(0|0|-27)$ von s aus Aufgabe 3.
6. Wie kann man die Schnittpunkte der Geraden s aus Aufgabe 3 mit der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 27)^2 = 27^2$ berechnen?

12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Lagebeziehung Ebene – Ebene — 10

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen; falls sie parallel sind, bestimmen Sie den Abstand; falls sie sich schneiden, Schnittgerade und Schnittwinkel.
   (a) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : 4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9$
   (b) $E_1 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$ und $E_2 : -x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 6$
   (c) $E_1 : 14x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ und $E_2 : 3{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1$

2. Geben Sie zur Ebene $E : x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4$ die Gleichung einer Ebene F an, die darauf senkrecht steht und die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, enthält.

3. In der Situation von ueb128.pdf/Aufgabe 4 ist durch die Punkte $A(0|0|0)$, $B(-6|0|0)$, $C(-6|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $D(0|2\sqrt{3}|2\sqrt{6})$, $S(-3|3\sqrt{3}|0)$ und $T(-3|-\sqrt{3}|2\sqrt{6})$ ein Oktaeder gegeben. Dabei sind alle Kanten gleich lang (z. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \sqrt{(-6-0)^2 + 0^2 + 0^2} = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{0 + (2\sqrt{3}-0)^2 + (2\sqrt{6}-0)^2} = 6$), und die Querschnittsflächen (z. B. $ABCD$) sind Quadrate (z. B. $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = (-6) \cdot 0 + 0 \cdot 2\sqrt{3} + 0 \cdot 2\sqrt{6} = 0$, also $\sphericalangle BAD = 90°$).



   (a) Die Ebene ASD hat die Gleichung $E_{ASD} : \sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 0$. Zeigen Sie, dass die durch die Punkte B, C und T gegebene Ebene parallel zu E_{ASD} ist.
   (b) Die im Oktaeder liegende Kugel um $M(-3|\sqrt{3}|\sqrt{6})$ mit Radius $\sqrt{6}$ berührt alle Seitenflächen, z. B. die Seitenfläche BCT im Punkt $Q(-5|\frac{1}{3}\sqrt{3}|\frac{4}{3}\sqrt{6})$.
   Der Radius $[MQ]$ steht senkrecht auf der Tangentialebene, d. h. $\overrightarrow{MQ}$ ist Normalvektor der Ebene; man kann nachrechnen, dass $\overrightarrow{MQ}$ ein Vielfaches des Normalvektors der Ebene E_{ASD} ist.
   Stellen Sie nun mit dieser Information die Gleichung der Parallelebene zu E_{ASD} durch den Punkt Q auf, und zeigen Sie, dass der Punkt B darauf liegt.
   (c) Der Mittelpunkt M der Kugel hat von der Ebene ABS und der Ebene ASD den gleichen Abstand, liegt also auf einer winkelhalbierenden Ebene dieser beiden Ebenen. Stellen Sie die Gleichungen dieser winkelhalbierenden Ebenen auf.
   (d) Bei geeigneter Beleuchtung wirft das Dreieck ASD einen Schatten auf die x_1x_2-Grundebene, so dass das projizierte Dreieck ASD' bei D' rechtwinklig ist und D' auf der Geraden $p : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, liegt. Wie kann D' berechnet werden?
   (e) Die x_1x_3-Ebene schneidet die Ebene $E_{TDC} : x_3 = 2\sqrt{6}$ in der Geraden YZ. Berechnen Sie mit dieser Information eine Gleichung der Geraden YZ.
   (f) Das Viereck $ABYZ$ ist ein gleichschenkliges Trapez mit Flächeninhalt $8\sqrt{6}$.
   (Y und Z können als Schnittpunkte der Geraden CT und DT mit der Ebene $x_2 = 0$ berechnet werden. Da die parallelen Geraden YZ und AB beide in der x_1x_3-Ebene verlaufen, AB in Höhe $x_3 = 0$, YZ in Höhe $x_3 = 2\sqrt{6}$, ist der Geradenabstand $d(YZ, AB) = 2\sqrt{6}$ und somit die Fläche $A_{ABYZ} = \frac{\overline{AB}+\overline{YZ}}{2} \cdot d(YZ, AB)$).
   Die x_1x_3-Ebene zerlegt das Oktaeder in zwei Teile. Wie kann berechnet werden, wie viel % die Pyramide $ABYZT$ vom ganzen Oktaeder ausmacht?

12. Klasse Übungsaufgaben — 12
Kompakt-Überblick zum Grundwissen — K

1. Integration (siehe auch grund121.pdf):
   (a) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1$; $g(x) = -x^2 - 1$.
   (b) Mit welchen „Tricks" berechnet man eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$?
   (c) Deuten Sie $\int_0^4 (0{,}25x - 2)dx$ elementargeometrisch!
2. Wendepunkte, Integralfunktionen (siehe auch grund122.pdf):
   Bestimmen Sie den Wendepunkt der durch $I(x) = \int_0^x (e^t - t)dt$ gegebenen Funktion.
3. Erwartungswert, Binomialverteilung (siehe auch grund123.pdf):
   An einer Schule gibt es 12 Mathematik-Lehrer, davon 4 „gefürchtete". Wie groß ist (bei Zufalls- und Unabhängigkeitsannahme) die Wahrscheinlichkeit, in drei aufeinander folgenden Schuljahren mindestens zweimal einen gefürchteten Lehrer zu erhalten,
   (a) wenn jedesmal „neu gewürfelt" wird,
   (b) wenn jedes Schuljahr mit einem anderen Lehrer besetzt wird?
   (c) Geben Sie Erwartungswert und Streuung für Teilaufgabe (a) an.
4. Testen von Hypothesen (siehe auch grund124.pdf):
   Nach einer großen Untersuchung im Jahr 1973 glaubten ca. 25 % der Deutschen, dass ein vierblättriges Kleeblatt Glück bringt. In einer neuen Untersuchung werden 100 Personen befragt. Wie viele müssten dabei nun auf den Glücksbringer vertrauen, damit die Schlagzeile „Deutsche immer abergläubischer" auf 5 %-Niveau gerechtfertigt ist?

In den Aufgaben 5 bis 10 sind gegeben: Punkte $A(0|1|4)$, $B(-1|-1|2)$, $C(4|3|0)$, $P(0|0|4)$ und Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

5. Geradengleichungen (siehe auch grund125.pdf):
   Prüfen Sie durch Aufstellen der Geradengleichung, ob C auf der Geraden AB liegt!
   Bestimmen Sie den Abstand der parallelen Geraden AB und h_1.
6. Ebenengleichungen (siehe auch grund126.pdf):
   g und der Mittelpunkt N von $[AP]$ legen eine Ebene E_1 fest. Geben Sie deren Gleichung in Parameterform an!
7. Normalenform und HNF von Ebenen (siehe auch grund127.pdf):
   Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E_2, die A, B, C enthält!
   Geben Sie die Gleichung der Lotgerade l auf E_2 durch P an!
   Geben Sie die Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt P an, die diese Ebene berührt!
8. Lagebeziehungen Gerade – Gerade (siehe auch grund128.pdf):
   Welche Lage haben die Geraden g und h_2 zueinander? Falls sie sich schneiden: Bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel.
9. Lagebeziehungen Gerade – Ebene (siehe auch grund129.pdf):
   Welche besondere Lage hat die Ebene $E_3 : 2x_1 - 7x_3 = 4$ im Koordinatensystem? Geben Sie die Schnittpunkte von E_3 mit den Koordinatenachsen und den jeweiligen Schnittwinkel an.
10. Lagebeziehungen Ebene – Ebene (siehe auch grund120.pdf):
    Gegeben sind $E_4 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und $E_5 : 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$. Bestimmen Sie die Schnittgerade s. (Übrigens ist s mit g identisch.)

12. Klasse Lösungen — 12

Integration — 01

1.

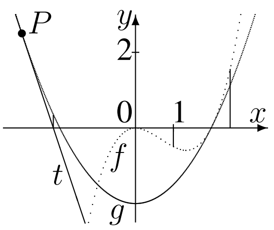
(a) Da f streng monoton steigend ist, nimmt die Funktion jeweils am rechten Streifenrand ihren größten Wert an. Daher ist $A \leq$ „Summe Streifenbreite · Streifenhöhe“ $1\cdot f(-1)+1\cdot f(0)+1\cdot f(1)+1\cdot f(2) = \frac{e^{-1}}{e^{-1}+1} + \frac{e^0}{e^0+1} + \frac{e^1}{e^1+1} + \frac{e^2}{e^2+1} \approx 2{,}38$.

(b) $A = \int\limits_{-2}^{2} f(x)dx = [\ln(e^x+1)]_{-2}^{2} = \ln(e^2+1) - \ln(e^{-2}+1) = 2$.
Die Abweichung 0,38 sind $\frac{0{,}38}{2} = 0{,}19 = 19\ \%$ hiervon.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = 1$ beschreibt einen Sättigungswert, dem sich die Verkaufszahlen auf lange Dauer nähern.
Das Integral A beschreibt einen Gesamtbestand, d. h. die Gesamtzahl der verkauften Autos im Zeitraum von vier Jahren (seit Markteinführung vor zwei Jahren bis in zwei Jahren) gemäß dieser Modellierung.

2.

(a) Wegen der Nullstellen $x = 0$ und $x = 2$ und wegen der Lage unterhalb der x-Achse ist



$A_1 = -\int\limits_0^2 f(x)dx = -\int\limits_0^2 (\frac{1}{2}x^3 - x^2)dx = -\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = -(2-\frac{8}{3}) = \frac{2}{3}$.

(b) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$;
$(x-2)x^2 = (x+2)(x-2)$; also $x_1 = 2$ oder $x^2 = x+2$, d. h. $x^2 - x - 2 = 0$, d. h. $x_{2/3} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$
$A_2 = \int\limits_{-1}^{2} (f(x)-g(x))dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}(x^3 - 3x^2+4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(4-8+8-(\frac{1}{4}-(-1)-4)) = \frac{27}{8}$.

(c) $A_3 = \int\limits_1^{2,5} (\frac{1}{2}x^3 - x^2)dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^{2,5} = \frac{1}{8}\cdot 2{,}5^4 - \frac{1}{3}\cdot 2{,}5^3 - (\frac{1}{8}-\frac{1}{3}) \approx -0{,}12 < 0$
Von den Flächenstücken, die zu diesem Integral beitragen, liegt mehr unterhalb als oberhalb der x-Achse.

(d) Berechnung der Tangente: $g'(x) = x$, $m = g'(-3) = -3$, Ansatz $y = -3x + t$, P einsetzen $2{,}5 = -3\cdot(-3)+t$ liefert t, also Tangente $t(x) = -3x - 6{,}5$.
Nullstelle der Tangente:
$-3x - 6{,}5 = 0$, also $x = -\frac{13}{6}$.
Das Flächenstück wird durch die Gerade $x = -\frac{13}{6}$ zerlegt in zwei Teile:
$A_4 = \int\limits_{-3}^{-\frac{13}{6}} (g(x)-t(x))dx + \int\limits_{-\frac{13}{6}}^{-2} g(x)dx$
$= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_{-3}^{-\frac{13}{6}} + \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_{-\frac{13}{6}}^{-2}$
$= \frac{1}{6}\cdot(-\frac{13}{6})^3 + \frac{3}{2}\cdot(-\frac{13}{6})^2 + \frac{9}{2}\cdot(-\frac{13}{6}) - (\frac{1}{6}\cdot(-3)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-3)^2 + \frac{9}{2}\cdot(-3)) + \frac{1}{6}\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2) - (\frac{1}{6}\cdot(-\frac{13}{6})^3 - 2\cdot(-\frac{13}{6})) = \frac{1}{8}$

(e) $\int\limits_0^b (\frac{1}{2}x^2 - 2)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_0^b = \frac{1}{6}b^3 - 2b - 0 = 0$, also $b(\frac{1}{6}b^2 - 2) = 0$, also $b_1 = 0$, $b_{2/3} = \pm\sqrt{12}$.
Bei $b = 0$ schrumpft die Fläche auf eine Linie der Breite 0, also Fläche 0.
Bei $b = \pm\sqrt{12}$ haben die Flächenanteile ober- und unterhalb der x-Achse gleichen Inhalt.

3.

(a) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^3-x-5}{x^2}dx = \int\limits_{-2}^{-1}(x - \frac{1}{x} - 5x^{-2})dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + 5x^{-1}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \ln 1 - 5 - (2 - \ln 2 - \frac{5}{2}) \approx -3{,}31$

(b) $\int\limits_0^4 (6x^{\frac{1}{3}} - 5)dx = \left[6\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 5x\right]_0^4 = \frac{9}{2}\cdot 4^{\frac{4}{3}} - 20 - 0 \approx 8{,}57$

(c) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1) \approx 0,86$

12. Klasse Lösungen — 12
Wendepunkte, Integralfunktionen — 02

1.
$I(x) = [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \sin x - \sin\frac{\pi}{2} = \sin x - 1$
$I(0) = \sin 0 - 1 = -1 < 0$
Die Fläche liegt zwar oberhalb der x-Achse, aber „rückwärts“ integrieren (von $\frac{\pi}{2}$ bis 0) ändert das Vorzeichen.

2.
(a) $f'(x) = 8x^3 - 1$; $f''(x) = 24x^2$

Extrema: $f'(x) = 0$: $x^3 = \frac{1}{8}$; $x = \frac{1}{2}$.
$f''(\frac{1}{2}) = 6 \Rightarrow$ Min

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.

$f'' > 0$ | 0 | $f'' > 0$

Also Flachpunkt bei $x = 0$.

(b) $f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
$f''(x) = -12x^2 + 12x$

Extrema: $f'(x) = 0$:
$-2x^2(2x - 3) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = \frac{3}{2}$.

$f' > 0$ | | $f' > 0$ | | $f' < 0$
steigt | 0 | steigt | $\frac{3}{2}$ | fällt

Also Terrassenpunkt bei $x = 0$, Maximum bei $x = \frac{3}{2}$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$:
$-12x(x - 1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

$f'' < 0$ | 0 | $f'' > 0$ | 1 | $f'' < 0$

Also Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 1$. Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in $f(x)$: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

Wendetangente im Punkt $(1|1)$:
$m = f'(1) = 2$. Ansatz: $y = 2x + t$.

Punkt einsetzen: $1 = 2 \cdot 1 + t \Rightarrow t$.
Also Wendetangente: $y = 2x - 1$.

(c) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.

Extrema: $f'(x) = 0$: $x = 0$.

$f' < 0$ | | $f' > 0$
fällt | 0 | steigt

Also Min$(0|0)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$: $x = 0$.

$f'' > 0$ | 0 | $f'' > 0$

Also Flachpunkt $(0|0)$

3.
$f'(x) = -x^{-2} - 2x$, $f''(x) = 2x^{-3} - 2 = \frac{2}{x^3} - 2$
$f''(x) = 0$: $x^3 = 1$; $x = 1$

$f'' < 0$ | | $f'' > 0$ | | $f'' > 0$
re.- | 0 | li.- | 1 | rechtsgekrümmt
| $\notin D$ | | WP $(1|0)$ |

4.
$f_k'(x) = \frac{x^2 \cdot k - (kx-2)\cdot 2x}{x^4} = \frac{kx - 2(kx-2)}{x^3} = \frac{4-kx}{x^3}$
$f_k''(x) = \frac{x^3\cdot(-k) - (4-kx)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2kx-12}{x^4}$.
$f_k''(x) = 0$: $2kx - 12 = 0$; $x = \frac{6}{k}$
Falls $k = 0$: Kein Wendepunkt.
Falls $k > 0$: re.- $0 \notin D$ re.- $\frac{6}{k}$ linksgekr.
Falls $k < 0$: li.- $\frac{6}{k}$ re.- $0 \notin D$ rechtsgekr.
WP$(\frac{6}{k}|\frac{k^2}{9})$, für $k = 3$ also $(2|1)$, stimmt.

5.
Ansatz wegen Achsensymmetrie mit geraden Funktionen: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$;
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$; $f''(x) = 12ax^2 + 2b$
WP bei $x = 1$: $f''(1) = 0$: $12a + 2b = 0$ A
Nullstelle bei $x = 1$: $f(1) = 0$: $a + b + c = 0$ B
Steigung bei $x = 1$: $f'(1) = 2$: $4a + 2b = 2$ C
Aus A und C folgt $8a = -2$, also $a = -\frac{1}{4}$.
Mit A folgt $b = \frac{3}{2}$, mit B dann $c = -\frac{5}{4}$.
Also: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$.
Mittels Vorzeichenbetrachtung von f'' bestätigt man, dass bei $x = 1$ tatsächlich ein WP vorliegt (und nicht nur ein Flachpunkt).

6.
Falls $I(x) = x\cdot(\ln(x+3) - \ln(2x)) + 3\ln(x+3) - 7\ln 2$ Integralfunktion, so muss deren Ableitung den Integranden ergeben:
$I'(x) = 1\cdot\ln\frac{x+3}{2x} + x\cdot(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x}\cdot 2) + 3\cdot\frac{1}{x+3} = \ln\frac{x+3}{2x} + x\cdot\frac{x-(x+3)}{(x+3)\cdot x} + \frac{3}{x+3} = f(x)$.
Mit Hilfe dieser Stammfunktion kann nun integriert werden:
$\int\limits_1^x \ln\frac{x+3}{2x}dx = [I(t)]_1^x = I(x) - I(1) = I(x) - (1\cdot\ln\frac{1+3}{2\cdot 1} + 3\ln(1+3) - 7\ln 2) = I(x) - (\ln 2 + 3\ln 4 - 7\ln 2) = I(x)$, denn $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$.
Aus $f(3) = I'(3) = 0$ folgt, dass I bei $x = 3$ eine waagrechte Tangente hat.

12. Klasse Lösungen — 12
Erwartungswert, Binomialverteilung — 03

1. Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$: „Wann unter den n Versuchen kommen die k Treffer“.
2. (a) $P(\text{„4 Treffer“}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15\cdot 903}{13\,983\,816} \approx 0{,}00097 = 0{,}097\ \%$
   (b) 49 Möglichkeiten für die erste Kugel, dann 48 für die zweite usw., also $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = \frac{49!}{43!} = 10\,068\,347\,520$
3. (a) Die Annahme ist zu hinterfragen, da z. B. einem im vorhergehenden Schritt zu kurz geschnittenes Blatt ein längeres nachfolgen könnte.
   (b)
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(k \geq 98) = B(100; 0{,}8; 98) + B(100; 0{,}8; 99) + B(100; 0{,}8; 100)$
     $= \binom{100}{98}0{,}8^{98}0{,}2^2 + \binom{100}{99}0{,}8^{99}0{,}2 + \binom{100}{100}0{,}8^{100}$
     $= \frac{100\cdot 99}{2} \cdot 0{,}8^{98}0{,}2^2 + 100 \cdot 0{,}8^{99}0{,}2 + 1 \cdot 0{,}8^{100} = 6{,}8 \cdot 10^{-8}$
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 90) = 0{,}99767$
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(k \geq 90) = 1 - P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 89) = 1 - 0{,}99430 = 0{,}00570$
   - $P_{n=100,p=0{,}8}(70 \leq k \leq 90) = P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 90) - P_{n=100,p=0{,}8}(k \leq 69) = 0{,}99767 - 0{,}00606 = 0{,}99161$

   (c) $P_{n=50,p=0{,}8}(k < 45) = P_{n=50,p=0{,}8}(k \leq 44) = 0{,}95197$
   Für die zweite Frage soll gelten: $P_{n=50,p=0{,}8}(k < k_0) = P_{n=50,p=0{,}8}(k \leq k_0 - 1) \geq 0{,}99$. Gemäß Tafel ist dies für $k_0 - 1 \geq 46$ der Fall, also $k_0 = 47$.
   (d) $\mu = 295\cdot 0{,}03 + 296\cdot 0{,}18 + 297\cdot 0{,}45 + 298\cdot 0{,}22 + 299\cdot 0{,}07 + 300\cdot 0{,}05 = 297{,}27$
   $V(X) = (295 - \mu)^2 \cdot 0{,}03 + (296 - \mu)^2 \cdot 0{,}18 + \ldots = 1{,}1771$, also $\sigma = 1{,}0849$
4. (a) M: Mädchen, S: Sparer. $P_S(M) = \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
   (b) Ohne Zurücklegen: $P(E) = \frac{\binom{8}{1}\binom{17}{3}}{\binom{25}{4}} = 0{,}43004$
   Mit Zurücklegen: $B(4; \frac{8}{25}; 1) = \binom{4}{1}0{,}32 \cdot 0{,}68^3 = 0{,}40247$
   Differenz also größer als $0{,}02$.
   Bei Ziehen ohne Zurücklegen aus einer größeren Personenzahl verändert das Ziehen eines Treffers die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Zug wieder einen Treffer zu ziehen, kaum, so dass dann Ziehen ohne Zurücklegen wie Ziehen mit Zurücklegen gerechnet werden kann.
   (c)
   - Das heißt, unter den ersten drei kein weiblicher Treffer:
     $P_{n=3,p=0{,}44}(k = 0) = 0{,}56^3 = 0{,}17562$
   - Das heißt, mindestens ein Treffer unter den ersten vier:
     $P_{n=4,p=0{,}44}(k \geq 1) = 1 - P_{n=4,p=0{,}44}(k = 0) = 1 - 0{,}56^4 = 0{,}90166$
   - Das heißt, unter den ersten drei ein Treffer, dann wieder ein Treffer:
     $B(3; 0{,}44; 1) \cdot 0{,}44 = \binom{3}{1}0{,}44 \cdot 0{,}56^2 \cdot 0{,}44 = 0{,}18214$

   (d) Soll gelten: $P_{n=?,p=\frac{4}{25}}(k \geq 1) > 0{,}99$, also $1 - P_{n=?,p=0{,}16}(k = 0) < 0{,}01$.
   $0{,}84^n < 0{,}01$; $n \ln 0{,}84 < \ln 0{,}01$.
   Da $\ln 0{,}84$ negativ ist, ändert sich beim Dividieren das Ungleichungszeichen: $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}84} \approx 26{,}4$, also mindestens 27.
   (e) $\mu = np = 200 \cdot \frac{10}{25} = 200 \cdot 0{,}4 = 80$. $\quad B(200; 0{,}4; 80) = 0{,}05751$.
   $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 6{,}9282$.
   $P_{n=200,p=0{,}4}(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = P_{n=200,p=0{,}4}(74 \leq k \leq 86) =$
   $P_{n=200,p=0{,}4}(k \leq 86) - P_{n=200,p=0{,}4}(k \leq 73) = 0{,}82607 - 0{,}17423 = 0{,}65184$

12. Klasse Lösungen — 12
Testen von Hypothesen — 04

1.
Treffer: Befragte Person ist Wähler der Partei, Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt.
H_0: $p \leq 0{,}05$, H_1: $p > 0{,}05$
ER: H_0 ablehnen, falls Trefferzahl $k \geq k_0$.
α-Fehler: H_0 abgelehnt, obwohl wahr, d. h. zu glauben, die Partei überspringt die 5 %-Hürde, obwohl sie nicht den dafür notwendigen Wähleranteil hat (= schwerer Fehler):
$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{\substack{n=200\\p=0{,}05}}(k \geq k_0) \leq 0{,}01$, d. h. $P_{\substack{n=200\\p=0{,}05}}(k \leq \underbrace{k_0 - 1}_{18 \text{ (Tafel)}}) \geq 0{,}99$,
also $k_0 = 19$.
ER also: H_0 ablehnen, d. h. kein Wahlkampf, falls mind. 19 Wähler in der Stichprobe.

2.
Treffer: Spiel mit sechs Würfen; hierfür: 6 Mögl. beim ersten Wurf, dann 5 beim zweiten usw., beim Laplace-Würfel also Treffer-w. $p = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6} = \frac{120}{7776}$, sonst p unbekannt.
H_0: $p \geq \frac{120}{7776}$, H_1: $p < \frac{120}{7776}$
ER: H_0 ablehnen, falls Trefferzahl $k \leq k_0$.
$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{\substack{n=1000\\p=120/7776}}(k \leq k_0) \leq 0{,}05$, Tabelle $\to k_0 = 8$.
ER also: H_0 ablehnen, d. h. den Würfel signifikant ablehnen, bei ≤ 8 Treffern.

3.
(a) Treffer: Steinplatte ist 1. Wahl, Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt.
H_0: $p \leq 0{,}70$, H_1: $p > 0{,}70$
α-Fehler: H_0 abgelehnt, obwohl wahr, d. h. zu glauben, die Steinplattenmenge sei hochwertig, obwohl sie nicht den nötigen Anteil hat $\to$ Verärgerung des Kunden, schwerer Fehler.

(b) ER: H_0 ablehnen, falls $k \geq k_0$.
$\alpha = P_{n=50,p=0{,}70}(k \geq k_0) \leq 0{,}05$,
d. h. $P_{\substack{n=50\\p=0{,}70}}(k \leq \underbrace{k_0 - 1}_{40 \text{ (Tafel)}}) \geq 0{,}95$,
also $k_0 = 41$.
ER also: H_0 ablehnen, d. h. Steinplattenmenge für gut halten, falls mind. 41 Platten 1. Wahl in der Stichprobe.

(c) Bei 20 % von 50 = 10 Steinen 2. Wahl, d. h. 40 Steine 1. Wahl, genügt dies also nicht, um die Lieferung für signifikant gut zu halten (weitere Tests nötig).

(d) $\beta = P_{n=50 p=0{,}85}(k \leq 40) \overset{\text{(Tafel)}}{=} 0{,}20891$

4.
(a) Treffer: Kandidat zieht Joker, Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt.
α-Fehler: Den Kandidaten aufgrund der Trefferzahl k für unbegabt halten, obwohl der in Wirklichkeit gut ist. Daher:
H_0: $p = 0{,}5$, H_1: $p = \frac{6}{110}$.
ER: H_0 ablehnen, falls $k \leq 1$.
$\alpha = P_{H_0}(H_0 \text{ abgelehnt}) = P_{n=12,p=6/110}(k \leq 1) \approx 0{,}51 + 0{,}35 = 0{,}86$ (Histogramm erste zwei Balken).
$\beta = P_{H_1}(H_0 \text{ nicht abgelehnt}) = P_{\substack{n=12\\p=0{,}50}}(k \geq 2) = 1 - P_{\substack{n=12\\p=0{,}50}}(k \leq 1) = 1 - (0{,}5^{12} + \binom{12}{1} 0{,}5^1 0{,}5^{11}) = 0{,}9968$

(b) ER jetzt: H_0 ablehnen, falls $k \leq k_0$.
$\alpha = P_{n=48,p=6/110}(k \leq k_0) \leq 0{,}10$, im Histogramm werden von 0 bis k_0 so viele Balken genommen, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten unter 0,10 bleibt, also nur der erste, also $k_0 = 0$. Bereits bei einem erkannten Joker kann die Hypothese eines „Zufallstreffers“ nicht angenommen werden.

Dies beweist zwar noch nicht die Begabung des Kandidaten, der Kandidat wird sozusagen „mangels Beweisen“ („in dubio pro reo“) freigelassen.

(c) Aufgrund der unterschiedlichen Skalierung der k-Achse müsste die zweite Graphik eigentlich 4-mal so breit gezeichnet werden; jedoch ist die Streuung $\sqrt{npq}$ nur $\sqrt{4} = 2$-fach, so dass sich im Histogramm ein schmälerer Berg ergibt.

(d) Durch Erhöhung des Stichprobenumfangs können beide Fehler verkleinert werden.

12. Klasse Lösungen — 12
Geradengleichungen — 05

1.
Q liegt nicht auf g, denn:

$$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l}\Rightarrow \lambda = -1\\ \checkmark\\ \lightning\end{array}$$

$R(0|2|1)$ liegt auf g, denn:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l}\Rightarrow \lambda = -2\\ \text{Probe: passt!}\\ \text{Probe: passt!}\end{array}$$

S liegt nicht auf g, denn:

$$\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l}\Rightarrow \lambda = 3\\ \lightning\end{array}$$

Für die x_3-Koordinate von T gilt: $0 = -1 - \lambda$, also $\lambda = -1$, also $T(1|4|0)$.

2.

$$AB : \vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\6\\-4\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

C liegt auf g: Wähle $\lambda = \frac{2}{3}$.
D liegt auf g: Wähle $\lambda = -2{,}5$.

3.

$$AB : \vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ansatz: $F(-1+3\lambda| -1-\lambda|1)$.

$$DF \perp g, \text{ also } \begin{pmatrix}-1+3\lambda-2{,}5\\-1-\lambda+0{,}5\\1-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} = 0.$$

$(-3{,}5+3\lambda)\cdot 3 + (-0{,}5-\lambda)\cdot(-1) + 0 = 0$.
$-10+10\lambda = 0$. $\lambda = 1$. Also $F(2|-2|1)$.
Abstand $d(D, AB) = |\overrightarrow{DF}| =$
$= \sqrt{(2-2{,}5)^2 + (-2+0,5)^2 + (1-1)^2} =$
$= \sqrt{2{,}5}$.
Dreiecksfläche A_{ABD}: $[DF]$ ist die Höhe im Dreieck ABD auf der Grundlinie $[AB]$, also
$A_{ABD} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{DF} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2{,}5} = \frac{5}{2}$.
Gleiches Ergebnis bei Berechnung mit dem Vektorprodukt: $A_{ABD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = \frac{5}{2}$ (vgl. ueb119.pdf, Aufgabe 2(c)).

4.

(a) Aufpunkt $(0|0|0)$, also ist g eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems.

(b) x_2-Komponente konstant 5, also ist h parallel zur x_1x_3-Ebene.

5.

(a) Die Punktkoordinaten können direkt in eine Geradengleichung übertragen werden („allgemeiner Geradenpunkt rückwärts“):

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\14\\12\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(b) Die drei Punkte haben jeweils gleichen Abstand voneinander.

Mögliche Formulierungen:

$P_{0,5}$ ist Mittelpunkt von P_0 und P_1.

P_{-1} ist der Spiegelpunkt von P_1 bei Spiegelung am Punkt P_0.

6.

(a) Die x_3-Koordinate wird 0:

$$p : \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

(b) y-Achsenabschnitt $(0|2{,}5)$ als Aufpunkt. Wegen Steigung $-\frac{1}{2}$ Richtungsvektor „2 nach rechts, 1 nach unten“, also

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

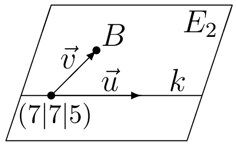
Dies ist übrigens die in die x_1x_2- bzw. xy-Grundebene eingebettete Gerade aus Teilaufgabe (a), denn der Punkt $(0|2{,}5|0)$ liegt auf p, wie man mit $\tau = -1{,}5$ sieht.

12. Klasse Lösungen	12
Ebenengleichungen	**06**

1. (a) $E_1 : \vec{X} = \vec{A} + \lambda(\vec{B} - \vec{A}) + \mu(\vec{C} - \vec{A}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Möglich sind auch Lösungen z. B. mit $\vec{X} = \vec{B} + \lambda(\vec{A} - \vec{B}) + \mu(\vec{C} - \vec{B})$).

   (b) B in k: $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $5 = 7 - 5\sigma$, also $\sigma = 0{,}4$, Probe in zweite Gleichung $8 = 7 - 5\sigma$ Widerspruch, also B nicht auf k.

   $E_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.



   (c) $E_3 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (d) $E_4 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. (a) Da der erste Richtungsvektor das 4-fache des zweiten Richtungsvektors ist, zeigen diese beiden in die gleiche Richtung, sind also linear abhängig, so dass keine Ebenengleichung entsteht.

   (b) P in E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Erste und dritte Zeile liefern $1 = 2 + 4\lambda + \mu$ und $3 = 1 + \lambda$, also $\lambda = 2$ und $\mu = -9$. Probe in zweite Zeile $-4 = -3 + 4\lambda + \mu$ stimmt. Also liegt P auf E, wegen $\lambda \notin [0; 1]$ aber nicht im Parallelogramm.

3. $\frac{1}{6}$ des Spatprodukts gibt das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C, D an. Ist das Volumen 0, so liegen A, B, C, D in einer Ebene. Spatprodukt hier:

   $$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 60 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 24 + 36 - 60 = 0.$$

   Also liegen die Vektoren in einer Ebene und sind somit linear abhängig.

4. (a) Mit den Punkten A_1, $A_2(0|4|0)$, A_3 stellt man die Gleichung der Ebene auf:

   $E : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (b) $\overrightarrow{ZA_i'} = \overrightarrow{A_iZ}$, also $\vec{A}_i' - \vec{Z} = \vec{Z} - \vec{A}_i$, also $\vec{A}_i' = 2\vec{Z} - \vec{A}_i$ liefert $A_1'(6|4|0)$, $A_2'(0|0|0)$, $A_3'(0|4|-4)$.

   Mit diesen Punkten stellt man die Gleichung von E' auf:

   $E' : \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

12. Klasse Lösungen — 12
Normalenform und HNF von Ebenen — 07

1.

(a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ oder bequemer mit dem $\frac{1}{5}$-fachen $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ansatz: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = d$. Einsetzen von $(11|2|-10)$ liefert $d = 0$.

Also $E_1 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

(b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder bequemer mit dem $\frac{1}{3}$-fachen $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ansatz: $2x_1 - x_2 = d$. Einsetzen von $(2|6|-1)$ liefert $d = -1$.

Also $E_2 : 2x_1 - x_2 = -2$.

(c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder bequemer mit dem $-\frac{1}{3}$-fachen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ansatz: $x_2 = d$.
Einsetzen von $(2|6|-1)$ liefert $d = 6$.

Also $E_3 : x_2 = 6$.

(d) E_1 geht durch den Ursprung, E_2 ist parallel zur x_3-Achse, E_3 ist parallel zur x_1x_3-Ebene.

(e) Zu E_2:
$$\begin{array}{rl} x_1 = 2 + \lambda - \mu & | \cdot (-2) \\ \underline{x_2 = 6 + 2\lambda - 2\mu} & | \\ -2x_1 + x_2 = 2 & \end{array}$$

Zu E_3: Zweite Zeile $x_2 = 6$ liefert direkt die parameterfreie Form.

(f)
$$\begin{array}{rl} x_1 = 1 + 2\lambda & | \cdot 3 \\ \underline{x_2 = 2 - 3\lambda} & | \cdot 2 \end{array}$$
$3x_1 + 2x_2 = 7$, also $x_2 = 3{,}5 - 1{,}5x_1$.

2.
$P \notin E$, denn Einsetzen von P in E liefert $2 - 3 - 7 \stackrel{?}{=} 24$ Widerspruch.

Lotgerade: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.
Skalarprodukt ausführen: $3(x_1 + 2) + 3x_2 - (x_3 - 9) = 0$, also $3x_1 + 3x_2 - x_3 = -15$.
P in E ergibt eine wahre Aussage:
$3 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) - 6 = -15$ (wahr).

4.

(a) $|\vec{n}_E| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$,

HNF: $E : \frac{1}{7}(3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 14) = 0$.

$|\vec{n}_F| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$,

HNF: $F : \frac{1}{3\sqrt{2}}(x_1 - 4x_2 - x_3 - 12) = 0$.

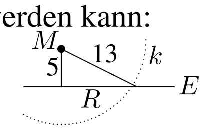
(b) Mit der HNF berechnet man den Abstand des Punktes P von den Ebenen:
$d(P, E) = |\frac{1}{7}(3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-6) - 14)| = 6$.
$d(P, F) = |\frac{1}{3\sqrt{2}}(4 - 4 \cdot 2 - (-6) - 12)| = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36$.
Also liegt P näher an F.

(c) Bei Einsetzen in die HNF muss 10 oder -10 resultieren:
$\frac{1}{7}(6x_3 - 14) = \pm 10$, also
$x_3 = \frac{\pm 70 + 14}{6}$, die gesuchten Punkte sind also $(0|0|14)$ und $(0|0|-\frac{28}{3})$.

(d) Radius $r = d(M, E) = |\frac{1}{7}(3 \cdot 9 - 2 \cdot 7 + 6 \cdot 6 - 14)| = 5$.
Also Kugel (→ grund114.pdf):
$(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 7)^2 + (x_3 - 6)^2 = 25$.

Aus der Skizze erkennt man, dass der Radius R des Schnittkreises mit Pythagoras berechnet werden kann:

$5^2 + R^2 = 13^2$, also $R = 12$.



12. Klasse Lösungen — 12

Lagebeziehung Gerade – Gerade — 08

1.
Parallele Ri.vektoren $\vec{u}_h = (-2)\vec{u}_g$.
Aufpunkt von h $(1|4|3)$ liegt nicht auf g (denn $1 = 2 + \lambda$, $4 = 6 + 2\lambda$, $3 = -1 - \lambda$ ergibt aus erster Gleichung $\lambda = -1$ im Widerspruch zur dritten Gleichung).
Also sind g und h echt parallel.

2.
(a) g und h haben gleichen Aufpunkt A, die Ri.vektoren zeigen aber in verschiedene Richtung (nicht Vielfache). Also schneiden sich g, h in $A(3|0|1)$.

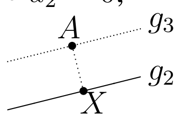
(b) g und k haben gleiche Ri.vektoren. Aufpunkt von k $(7|7|5)$ liegt nicht auf g (denn $7 = 3 - 5\lambda$, $7 = 0 - 5\lambda$, $5 = 1 + \lambda$ führt bereits in den ersten beiden Gleichungen zum Widerspruch). Also sind g und k echt parallel.

3.
(a) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt
$-1+\lambda=1$, $-1=2+\mu$, $1-3\lambda=4+3\mu$.
Also $\lambda = 2$, $\mu = -3$, Probe in dritte Gleichung stimmt.
Also schneiden sich g_1 und g_2.
Schnittpunkt $S(1|-1|-5)$.
Schnittwinkel φ aus $\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|} = \frac{|1\cdot 0+0\cdot 1+(-3)\cdot 3|}{\sqrt{1+0+9}\cdot\sqrt{0+1+9}} = 0{,}9$, also $\varphi \approx 25{,}84°$.

(b) Ri.vektoren $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ parallel ($\vec{u}_3 = 2\vec{u}_2$). Aufpunkt von g_3 $(2|4|8)$ eingesetzt in g_2 ergibt bereits in der ersten Zeile $2 = 1 + 0\mu$ einen Widerspruch, also sind g_2 und g_3 echt parallel.

Abstand des g_3-Aufpunkts $A(2|4|8)$ von der Geraden g_2:
Fußpunkt X als allg. g_2-Geradenpunkt ansetzen: $X(1|2+\mu|4+3\mu)$. Bedingung: $\overrightarrow{AX} \perp g_2$, also $\overrightarrow{AX} \circ \vec{u}_2 = 0$;

$$\begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+\mu-4 \\ 4+3\mu-8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0;$$



$(-1)\cdot 0 + (-2+\mu)\cdot 1 + (-4+3\mu)\cdot 3 = 0$;
$10\mu = 14$; $\mu = 1{,}4$; also $X(1|3{,}4|8{,}2)$.

(Fortsetzung von Aufgabe 3(b))
Gesuchter Abstand $d(g_2, g_3) = |\overrightarrow{AX}|$
$= \sqrt{(1-2)^2 + (3{,}4-4)^2 + (8{,}2-8)^2}$
$= \sqrt{1{,}4} \approx 1{,}18$.

(c) Ri.vektoren $\vec{u}_3 \| \vec{u}_4$ ($\vec{u}_4 = -1{,}5\vec{u}_3$). Aufpunkt von g_4 $(2|-4|-16)$ eingesetzt in g_3 ergibt $2 = 2$, $-4 = 4 + 2\sigma$, $-16 = 8 + 6\sigma$; aus zweiter Gleichung also $\sigma = -4$, Probe in erster Gleichung stimmt sowieso, in dritter Gleichung $-16 = 8 + 6\cdot(-4)$ stimmt ebenfalls, also sind g_3 und g_4 identisch.

(d) Ri.vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_4$ sind nicht parallel. Gleichsetzen ergibt $-1 + \lambda = 2$,
$-1 = -4 - 3\tau$, $1 - 3\lambda = -16 - 9\tau$.
Aus erster und zweiter Gleichung folgen $\lambda = 3$ und $\tau = -1$; Probe in dritter Gleichung $-8 \neq -7$; g_1 und g_4 sind also windschief.

4.
(a) Aufpunkt von g ist D, Richtungsvektor von g ist $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -3-(-6) \\ 3\sqrt{3}-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$, also $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Analog $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Gleichsetzen liefert $3\lambda = -6 - 3\mu$, $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\lambda = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\mu$, $2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$. Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sqrt{3}$ und Addition der zweiten Gleichung liefert $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\lambda = -4\sqrt{3}$, also $\lambda = -1$, $\mu = -1$ und somit Schnittpunkt $T(-3|-\sqrt{3}|2\sqrt{6})$.

(b) x_3-Achse: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ri.vektoren nicht parallel. Gleichsetzen: $-4 + 2\sigma = 0$, $0 = 0$, $2\sqrt{6} = \tau$.
Also $\sigma = 2$, $\tau = 2\sqrt{6}$, Probe in zweiter Gleichung stimmt. Somit schneiden sich YZ und die x_3-Achse.

12. Klasse Lösungen	**12**
Lagebeziehung Gerade – Ebene	**09**

1.
Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts $(\lambda|9-4\lambda|-7+\lambda)$ liefert:

(a) $\lambda-(9-4\lambda)-5(-7+\lambda)=26; 26=26$ (wahr); g liegt in E.

(b) $3\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)+8=0$; $\lambda=-3$; g und E schneiden sich im Punkt $S(-3|21|-10)$.
Schnittwinkel ψ: $\sin\psi=\frac{|1\cdot 3+(-4)\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{1+16+1}\cdot\sqrt{9+1+4}}\approx 0{,}063$; $\psi\approx 3{,}61°$.

(c) $2\lambda+(9-4\lambda)+2(-7+\lambda)=5; -5=5$; g und E sind echt parallel.
HNF von E: $|\vec{n}|=\sqrt{4+1+4}=3$, also $E:\frac{1}{3}(2x_1+x_2+2x_3-5)=0$; $d(g,E)=|\frac{1}{3}(2\cdot 0+9+2\cdot(-7))|=\frac{5}{3}$.

2.

(a) Die Bedingung $\vec{u}\circ\vec{n}=0$ liefert $2\cdot 4+k\cdot 2+(-5)\cdot(-10)=0$, also $k=-29$.

(b) Richtungsvektor $\vec{u}$ und Normalvektor $\vec{n}$ müssen Vielfache sein. An der ersten/dritten Koordinate sieht man, dass $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{n}$ sein muss, also $k=\frac{1}{2}\cdot 2=1$.

3.

(a) Einsetzen von s in E_1 bzw. E_2:
$-4+4\lambda+2(4-2\lambda)=4; 4=4$ (wahr); $3(-4+4\lambda)-4(-3+3\lambda)=0; 0=0$ (wahr); also liegt s in E_1 und E_2.

(b) Achsenpunkte A_i von E_1 mit der x_i-Achse: $A_1(4|0|0)$, $A_2(0|?|0)$ existiert nicht, $A_3(0|0|2)$.
Also ist E_1 parallel zur x_2-Achse, so dass auch die Spurgeraden mit der x_1x_2-Ebene und mit der x_2x_3-Ebene in x_2-Richtung zeigen (siehe Skizze):

$$s_{12}:\vec{X}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R}.$$

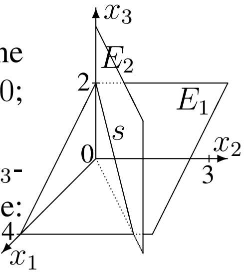
$$s_{13}:\vec{X}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix},\ \sigma\in\mathbb{R}.$$

$$s_{23}:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \tau\in\mathbb{R}.$$

(Fortsetzung von 3 (b))
Achsenpunkte B_i von E_2 mit der x_i-Achse: $B_1(0|0|0)$, $B_2(0|0|0)$, $B_3(0|0|?)$: Alle Punkte B_3 liegen in E_2, d. h. E_2 enthält die x_3-Achse, die somit zugleich Spurgerade mit der x_1x_3- und der x_2x_3-Ebene ist:
$\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $r\in\mathbb{R}$.

Für die Spurgerade mit der x_1x_2-Ebene benötigt man einen weiteren dort in E_2 liegenden Punkt, z. B. mit $(4|3|0)$: $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

Spurpunkte von s:
Mit x_1x_2-Ebene $x_3=0$: $4-2\lambda=0$; $\lambda=2$; $S_{12}(4|3|0)$.
Analog mit x_1x_3- und x_2x_3-Ebene: $S_{13}=S_{23}(0|0|2)$.



4.
Lotgerade $l:\vec{X}=\begin{pmatrix}9\\2\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ in E:
$9+\lambda-3(-5-3\lambda)=4$; $\lambda=-2$; $F(7|2|1)$.
Spiegelpunkt P': $\overrightarrow{FP'}=\overrightarrow{PF}$, also $\vec{P'}-\vec{F}=\vec{F}-\vec{P}$, also $\vec{P'}=2\vec{F}-\vec{P}$, also $P'(5|2|7)$.

5.
Bild analog ueb129.pdf. Ansatz für Ebene durch P senkrecht zu s mit Normalvektor = Ri.vektor der Geraden: $4x_1+3x_2-2x_3=d$.
P einsetzen: $4\cdot 0+3\cdot 0-2\cdot(-27)=d$, $d=54$, also Ebene: $E:4x_1+3x_2-2x_3=54$.
s in E: $4(-4+4\lambda)+3(-3+3\lambda)-2(4-2\lambda)=54$; $\lambda=3$ in s einsetzen: $F(8|6|-2)$.
Abstand $d(P,g)=\overline{PF}=\sqrt{(8-0)^2+(6-0)^2+(-2+27)^2}=5\sqrt{29}$

6.
Allgemeinen Geradenpunkt in Kugelgleichung einsetzen: $(-4+4\lambda)^2+(-3+3\lambda)^2+(4-2\lambda+27)^2=729$ liefert quadratische Gleichung mit zwei Lösungen für λ.

12. Klasse Lösungen — 12
Lagebeziehung Ebene – Ebene — 10

1.

(a) E_1 und E_2 schneiden sich (Normalvektoren sind nicht Vielfache).

$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \quad | \cdot 4$
$\underline{4x_1 - x_2 + 8x_3 = 9 \quad |\quad}$
$12x_1 - 5x_2 = 33$
$x_1 = \lambda$
$12\lambda - 5x_2 = 33$, also $x_2 = 2{,}4\lambda - 6{,}6$
$2\lambda – (2{,}4\lambda – 6{,}6) – 2x_3 = 6$; $x_3 = 0{,}3 – 0{,}2\lambda$
Schnittgerade:
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$
Schnittwinkel: $\cos\varphi = \frac{|2\cdot 4+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot 8|}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{16+1+64}} = \frac{7}{27}$; $\varphi \approx 74{,}97°$.

(b) E_1 und E_2 sind echt parallel (denn $E_2 | \cdot (-2)$ ergibt $2x_1 - x_2 - 2x_3 = -12$).

HNF von E_1: $|\vec{n}_1| = \sqrt{4+1+4} = 3$, also $E_1 : \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 6) = 0$.
Punkt auf E_2: $P(0|0|6)$. Abstand: $d(E_1, E_2) = |\frac{1}{3}(0 - 0 - 2\cdot 6 - 6)| = 6$.

(c) E_1 und E_2 sind identisch (denn Mult. der E_2-Gleichung mit 4 ergibt E_1).

2.

F muss in Ri. der Geraden und in Ri. des Normalvektors der Ebene E verlaufen, also Normalvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, und F enthält den Geraden-Aufpunkt $A(1|1|-1)$.
Ansatz: $F : 7x_1 - x_2 + 3x_3 = d$, A einsetzen: $7 - 1 - 3 = d$, also $F : 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$.

3.

(a) E_{BCT}: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\sqrt{2} \\ 6\sqrt{6} \\ -6\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$
Ansatz $18\sqrt{2}x_1 + 6\sqrt{6}x_2 - 6\sqrt{3}x_3 = d$, $B(-6|0|0)$ einsetzen: $d = -108\sqrt{2}$.
Division durch $6\sqrt{3}$ ergibt E_{BCT} : $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$, also mit E_{ASC} paralleler Normalvektor.

(b) Ansatz für die Parallelebene: $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = d$, Einsetzen von Q liefert $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = -6\sqrt{6}$.

Einsetzen von $B \to$ wahre Aussage.

(c) HNF von E_{ASD}: $|\vec{n}| = \sqrt{6+2+1} = 3$, also $E_{ASD} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = 0$.
HNF von $E_{ABS} : x_3 = 0$.

Für Punkte P mit gleichem Abstand von E_{ABS} und E_{ASD} gilt $d(P, E_{ABS}) = d(P, E_{ASD})$, also (mit HNF): $|\frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3)| = |x_3|$.

Winkelhalbierende Ebenen also:
$E_{W1} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3) = +x_3$, d. h. $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 - 4x_3 = 0$ und $E_{W2} : \frac{1}{3}(\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 – x_3) = -x_3$, d. h. $\sqrt{6}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2x_3 = 0$ (wobei $M \in E_{W2}$).

(d) D' wird als allgemeiner Geradenpunkt von p angesetzt: $D'(2-\lambda|\sqrt{3}\lambda|0)$.
$\overrightarrow{AD'} \perp \overrightarrow{SD'}$, also $\overrightarrow{AD'} \circ \overrightarrow{SD'} = 0$, also $(2-\lambda)\cdot(2-\lambda+3) + \sqrt{3}\lambda \cdot (\sqrt{3}\lambda - 3\sqrt{3}) + 0 = 0$, also $4\lambda^2 - 16\lambda + 10 = 0$.

(e) x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$. $E_{TDC} : x_3 = 2\sqrt{6}$.
Bei diesem unterbestimmten Gleichungssystem liegen x_2 und x_3 bereits fest. Frei wählbar ist also nur $x_1 = \lambda$.
Somit:
$$YZ : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(f) $V_{\text{Oktaeder}} = 2\cdot$Volumen der Pyramide $ABCDT = 2 \cdot \frac{1}{3}$Grundfläche $\cdot$ Höhe, wobei Grundfläche = Quadratfläche und Höhe = Abstand des Punktes T von der Ebene E_{ABD} (mit Hilfe der HNF).
Volumen der Pyramide $ABYZT =$ $= \frac{1}{3}$ Trapez-Grundfläche $\cdot$ Höhe, wobei die Höhe wieder als Abstand des Punktes T von der Trapez-Ebene $x_2 = 0$ gesehen werden kann.

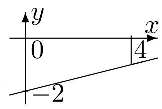
Der prozentuale Anteil wird dann als Bruch $\frac{V_{\text{Pyr}}}{V_{\text{Oktaeder}}}$ berechnet.

12. Klasse Lösungen — 12
Kompakt-Überblick zum Grundwissen — K

1.

(a) Schnittstellen: $f(x)=g(x)$; $\frac{1}{2}x^3+x^2=0$; $x^2(\frac{1}{2}x+1)=0$; $x_{1/2}=0$, $x_3=-2$
$\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx=\int_{-2}^{0}(\frac{1}{2}x^3+x^2)dx$
$=[\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{3}x^3]_{-2}^{0}=0-(2-\frac{8}{3})=\frac{2}{3}$

(b) Bruch auseinanderziehen und $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ schreiben: $\int\frac{2x+1}{x^2}dx=\int(\frac{2}{x}+x^{-2})dx=$
$=2\ln|x|-x^{-1}+C$



(c) Trapezfläche unterhalb der x-Achse mit Mittellinie 1,5 u. Höhe 4, Integralwert also $-\frac{3}{2}\cdot 4=-6$.

2.

$I(x)=[e^t-\frac{1}{2}t^2]_0^x=e^x-\frac{1}{2}x^2-1$,
$I'(x)=e^x-x$ (klar nach HdI),
$I''(x)=e^x-1$, $I''(x)=0$ ergibt $x=0$.

$I''<0$		$I''>0$	$I(0)=0$, also
rechts-	0	links-gekrümmt	WP(0|0)

3.

(a) $B(3;\frac{1}{3};2)+B(3;\frac{1}{3};3)=0{,}25926$

(b) $\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{12}{3}}+\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{8}{0}}{\binom{12}{3}}=0{,}23636$

(c) $E(X)=3\cdot\frac{1}{3}=1$,
$\sigma=\sqrt{V(x)}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816$

4.

Treffer: Befragte Person:„Kleeblatt = Glück"
$H_0: p\leq 0{,}25$ $\quad H_1: p>0{,}25$
Entscheidungsregel: H_0 ablehnen („Schlagzeile trifft zu"), falls Trefferzahl $k\geq k_0$
$\alpha=P_{H_0}(H_0$ abgelehnt$)=P(k\geq k_0)\leq 0{,}05$;
$P_{n=100;p=0{,}25}(k\leq k_0-1)\geq 0{,}95$
Tafel: $k_0-1=32$, also $k_0=33$.

5.

$AB:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
Einsetzen von C (erste Zeile $\lambda=-4$, zweite Zeile $\lambda=-1$), also liegt C nicht auf AB.
Abstand von $H(2|-7|2)$ von AB: Allg. Geradenpunkt $F(-\lambda|1-2\lambda|4-2\lambda)$. $\overrightarrow{HF}\circ\vec{u}=0$;
$(-\lambda-2)\cdot(-1)+(-2\lambda+8)\cdot(-2)+(-2\lambda+2)\cdot(-2)=0$; $\lambda=2$; Lotfußpunkt des Lots von H auf g: $F(-2|-3|0)$
Abstand: $\overline{HF}=\sqrt{16+16+4}=6$

6.

$\vec{N}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{P})$, also $N(0|0{,}5|4)$.
$E_1:\vec{X}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\2\end{pmatrix}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

7.

$E_2:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ mit $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}$
Normalvektor $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$, Ansatz $n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=d$ und Einsetzen von A liefern:
$E_2: 12x_1-12x_2+6x_3-12=0$
$|\vec{n}|=\left|\begin{pmatrix}12\\-12\\6\end{pmatrix}\right|=\sqrt{144+144+36}=18$
HNF: $\frac{1}{3}(2x_1-2x_2+x_3-2)=0$
P in HNF: $d(P,E_2)=|\ldots|=\frac{2}{3}$
$l:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+\kappa\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\kappa\in\mathbb{R}$.
Kugelgleichung: $x_1^2+x_2^2+(x_3-4)^2=(\frac{2}{3})^2$

8.

Ri.vektoren nicht parallel; gleichsetzen:
$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\10\\7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$
Erste Zeile: $-1+\lambda=-3$, $\lambda=-2$.
In zweite Zeile: $-2=10+4\mu$, $\mu=-3$.
Probe in dritter Zeile stimmt,
g und h_1 schneiden sich in $(-3|-2|4)$.
Schnittwinkel φ: $\varphi\approx 65{,}16°$, denn
$\cos\varphi=\frac{|\vec{u_1}\circ\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|\cdot|\vec{u_2}|}=\frac{1\cdot 0+1\cdot 4+(-1)\cdot 1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{0+16+1}}\approx 0{,}42$

9.

E_3 ist parallel zur x_2-Achse.
Achsenpunkte sind $(?|0|0)$, $(0|?|0)$ und $(0|0|?)$, also $(2|0|0)$ mit x_1-Achse, $(0|0|-\frac{4}{7})$ mit x_3-Achse, kein Schnitt mit x_2-Achse.
Schnittwinkel ψ mit den Achsen: Mit Richtungsvektor $\vec{u}$ der x_1-Achse und Normalvektor $\vec{n}$ von E_3, $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\0\\-7\end{pmatrix}$, und
$\sin\psi=\frac{|\vec{u}\circ\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$ folgt $\psi\approx 15{,}95°$ mit x_1-Achse und analog $\psi\approx 74{,}05°$ mit x_3-Achse.

10.

„E_4 plus $2\cdot E_5$" liefert $7x_1+7x_3=7$; z. B. $x_1=\tau$, dann $x_3=1-\tau$, $x_2=4-2x_1-3x_3=1+\tau$, also $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\tau\in\mathbb{R}$.