12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Lagebeziehungen Gerade – Gerade — 08

Richtungsvektoren parallel (d. h. Vielfache voneinander)?			
ja		nein	
Aufpunkt der einen Geraden in die andere einsetzen		Geraden gleichsetzen	
liegt drauf	liegt nicht drauf	eindeutige Lösung	Widerspruch
identisch	echt parallel	schneiden sich	windschief

Beispiele:

$$g_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} \quad g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \quad g_3: \vec{X} = \begin{pmatrix}0{,}8\\-0{,}8\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-0{,}4\\-0{,}6\\-1\end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Lagebeziehung von g_1 und g_2:
Die Richtungsvektoren sind nicht parallel. Falls nicht schon geschehen, müssen vor dem Gleichsetzen die Parameter verschiedene Bezeichnungen erhalten.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 1 + \lambda_1 = 4 + 2\lambda_2 \quad | \cdot (-4) \\ \text{II} & 2 + 4\lambda_1 = 4 + 3\lambda_2 \quad | \\ \text{III} & 1 + 3\lambda_1 = 8 + 5\lambda_2 \end{array}$$

Aus zwei Gleichungen (z. B. I und II) λ_1 und λ_2 berechnen:

$$-2 = -12 - 5\lambda_2; \quad \lambda_2 = -2$$

in I: $\lambda_1 = -1$
Probe mit der dritten (noch nicht verwendeten) Gleichung: $-2 = -2$ (stimmt).
Die Geraden schneiden sich.
Schnittpunkt: λ_1 in g_1 einsetzen (oder λ_2 in g_2): $S(0|-2|-2)$.

Lagebeziehung von g_2 und g_3:
Die Richtungsvektoren sind parallel, denn $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} = -0{,}2 \begin{pmatrix}-0{,}4\\-0{,}6\\-1\end{pmatrix}$.
Aufpunkt von g_3 $(0{,}8|-0{,}8|0)$ in g_2 einsetzen:

$$\begin{pmatrix}0{,}8\\-0{,}8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\begin{array}{rcll} 0{,}8 & = & 4 + 2\lambda_2, & \text{also } \lambda_2 = -1{,}6 \\ -0{,}8 & = & 4 + 3\lambda_2, & \text{Probe stimmt} \\ 0 & = & 8 + 5\lambda_2, & \text{Probe stimmt.} \end{array}$$

Also sind g_2 und g_3 identische Geraden.

Schnittwinkel sich schneidender Geraden
Wenn sich zwei Geraden schneiden, so berechnet sich der Schnittwinkel aus den Richtungsvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ mit

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

Beispiel:
Für obige Geraden g_1, g_2 ist $\cos\varphi = \frac{1\cdot2+4\cdot3+3\cdot5}{\sqrt{1+16+9}\cdot\sqrt{4+9+25}} \approx 0{,}9226$, also $\varphi \approx 22{,}69°$.

Geraden schneiden sich senkrecht, wenn sie sich schneiden und die Richtungsvektoren aufeinander senkrecht stehen (also deren Skalarprodukt $\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2 = 0$ ist).

Abstand paralleler Geraden
= Abstand des Aufpunkts der einen Geraden von der anderen Geraden (→ grund125.pdf)

Abstand windschiefer Geraden
Ebenengleichung für die Ebene aufstellen, die g_1 enthält und zu g_2 parallel ist (also mit g_1 und Richtungsvektor $\vec{u}_2$), HNF aufstellen und Abstand des Aufpunkts der Geraden g_2 von dieser Ebene bestimmen.