12. Klasse TOP 10 Grundwissen	12
Normalenform und HNF von Ebenen	**07**

Normalenform (Koordinatenform, parameterfreie Form)
Eine Ebene kann gegeben sind durch einen Aufpunkt A und einen auf der Ebene senkrecht stehenden Normalvektor $\vec{n}$ und ist dann die Menge aller Punkte X mit $\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$, d. h. $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$, d. h. (nach Ausführung des Skalarprodukts) $n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_x) = 0$ bzw.

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - d = 0.$$

Bestimmung der Normalenform aus der Parameterform $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
Der Normalvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, also $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (→ grund114.pdf), wobei man auch ein Vielfaches als Normalvektor verwenden kann. Danach macht man den Ansatz $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ und erhält d durch Einsetzen des Aufpunkts A.
Beispiel:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ansatz $11x_1 + x_2 - 5x_3 = d$. $A(1|2|1)$ einsetzen: $d = 11 + 2 - 5 = 8$. Also:
$E : 11x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$.
Interpretation: Die Ebene besteht aus allen Punkten $X(x_1, x_2, x_3)$, für die diese Gleichung gilt. Durch Einsetzen von Punktkoordinaten kann man also prüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Ebene liegt.

Besondere Lage: Ist $d = 0$, so liegt der Ursprung $(0|0|0)$ auf der Ebene.
Ist $n_1 = 0$ (z. B. $F : 2x_2 - x_3 = -2$), so ist die Ebene parallel zur x_1-Achse.

Lotvektor und Lotfußpunkt
Die Koeffizienten in der Normalenform bilden einen Lotvektor zur Ebene.
In den obigen Beispielen sind $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Normalenvektoren (also Vektoren, die auf der Ebene senkrecht stehen).
Um den Lotfußpunkt eines Punktes P auf einer Ebene E zu finden, stellt man die Lotgerade durch P mit Richtungsvektor $\vec{n}$ auf ($\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene E) und bestimmt den Schnittpunkt mit der Ebene (→ grund129.pdf).

Bestimmung der Hesseschen Normalenform (HNF)
Man bestimmt die Länge des Normalenvektors, dividiert die Ebenengleichung durch diesen Wert und löst die Gleichung nach 0 auf (bringt also die Konstante auf die linke Seite); erhält die Konstante dabei ein positives Vorzeichen, so multipliziert man die Gleichung mit -1.
Beispiel 1: $E : 11x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$. $|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11^2 + 1 + (-5)^2} = \sqrt{147}$. Die HNF lautet somit $\frac{1}{\sqrt{147}}(11x_1 + x_2 - 5x_3 - 8) = 0$.
Beispiel 2: Die HNF der Ebene $F : 2x_2 - x_3 = -2$ lautet $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x_2 + x_3 - 2) = 0$.

Abstand Punkt – Ebene
Durch Einsetzen der Punktkoordinaten in der Term der HNF erhält man den Abstand des Punktes von der Ebene, wobei ein negatives Vorzeichen bedeutet, dass der Punkt im gleichen Halbraum wie der Ursprung $O(0|0|0)$ liegt (also auf der gleichen Seite der Ebene).
Beispiel:
Der Abstand des Punktes $P(3|-1|4)$ von der Ebene $E : \frac{1}{\sqrt{147}}(11x_1 + x_2 - 5x_3 - 8) = 0$ ist $d(P, E_1) = \frac{4}{\sqrt{35}}$, und P und O liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene. Der Abstand des Nullpunkts O ist $d(O, E_1) = \frac{8}{\sqrt{147}}$. Der Punkt $Q(4|4|8)$ liegt auf der Ebene E.