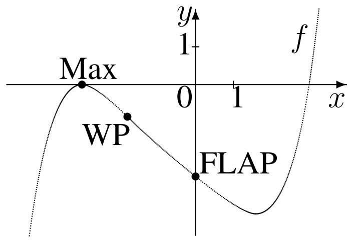
12. Klasse TOP 10 Grundwissen — 12
Wendepunkte, Integralfunktionen — 02

Krümmung und Wendepunkte
$f''(x)$ bilden, $f''(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f'' ermitteln ($\rightarrow$ grund107.pdf, dabei ggf. auch Definitionslücken markieren)
Krümmung: $f'' > 0$: Graph ist in diesem Bereich linksgekrümmt; $f'' < 0$: rechtsgekrümmt.
Dazwischen bei $f''(x) = 0$: **Flachpunkt**; bei Vorzeichenwechsel von f'' sogar **Wendepunkt**; wenn zusätzlich zum Vorzeichenwechsel dort $f'(x) = 0$: **Terrassenpunkt**.
Die y-Koordinate dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in $f(x)$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{100}(x+3)(x^2-9)(x^2+9) = \frac{1}{100}(x^5+3x^4-81x-243)$
$f'(x) = \frac{1}{100}(5x^4+12x^3-81)$
$f''(x) = \frac{1}{100}(20x^3+36x^2)$
$f''(x) = 0$: $\frac{1}{100}x^2(20x+36) = 0$; $x_{1/2} = 0$; $x_3 = -1{,}8$.

$f'' < 0$ $f'' > 0$ $f'' > 0$
rechts- $-1{,}8$ links- 0 links-   gekrümmt
WP$(-1{,}8|y)$ FLAP$(0|0)$
mit $y = f(-1,8) \approx -0{,}85$



Unter einer **Wendetangente** versteht man die Tangente im Wendepunkt.

Kriterium für Extrema ($\rightarrow$ grund113.pdf) mit Hilfe der zweiten Ableitung f'':
Bekanntlich genügt $f'(x) = 0$ noch nicht für das Vorliegen eines Extremums, sondern es muss noch ein Vorzeichenwechsel (VZW) von f' vorliegen. Alternativ zur Vorzeichenbetrachtung kann man die in Frage kommenden x-Werte in $f''(x)$ einsetzen. Ist dann an einer solchen Stelle $f''(x) > 0$, so ist dort der Graph linksgekrümmt, d. h. es handelt sich um ein Minimum, bei $f''(x) < 0$ entsprechend um ein Maximum.
Ist an einer solchen Stelle $f''(x) = 0$, so muss man doch die Vorzeichenbereiche untersuchen.
In obigem Beispiel $f(x) = \frac{1}{100}(x+3)(x^2-9)(x^2+9)$ ist
$f'(-3) = \frac{1}{100}(5\cdot(-3)^4 + 12\cdot(-3)^3 - 81) = 0$ und
$f''(-3) = \frac{1}{100}(20\cdot(-3)^3 + 36\cdot(-3)^2) = -2{,}16 < 0$ und daher $x = -3$ eine Maximalstelle.

Integralfunktion
Bei fester unterer Grenze a und variabler oberer Grenze x erhält man durch $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Integralfunktion.
Beispiel: Eine Integralfunktion zu $f(t) = \frac{1}{4}t + 3$ ist z. B. (bei $a = -4$) gegeben durch
$I(x) = \int_{-4}^{x}(\frac{1}{4}t+3)dt = \left[\frac{1}{8}t^2+3t\right]_{-4}^{x} = \frac{1}{8}x^2+3x-(\frac{1}{8}\cdot(-4)^2+3\cdot(-4)) = \frac{1}{8}x^2+3x+10.$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion, d. h. $I'(x) = f(x)$.
In obigem Beispiel mit $I(x) = \frac{1}{8}x^2+3x+10$ ist $I'(x) = \frac{1}{4}x+3 = f(x)$.
Die Begriffe Integralfunktion und Stammfunktion sind jedoch verschieden: Eine Integralfunktion hat stets mindestens eine Nullstelle (nämlich untere Grenze $x = a$), eine Stammfunktion muss jedoch diese Eigenschaft nicht haben.

Zusammenhänge zwischen Eigenschaften einer Stammfunktion F und $f = F'$

Eig. der Stammfkt. F	Formaler Zusammenhang	Eig. von f an einer Stelle x
F hat Extremum	$F'(x) = f(x) = 0$ mit VZW	f hat Nullstelle mit VZW
F hat Wendepunkt	$F''(x) = f'(x) = 0$ mit VZW	f hat Extremum