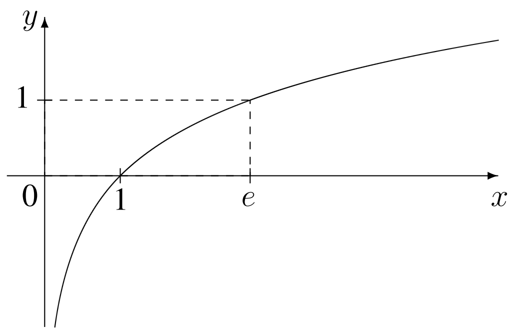
11. Klasse TOP 10 Grundwissen — 11

ln-Funktion — 08

$f(x) = \ln x$ („Natürliche Logarithmusfunktion“)



1. Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$
   (im $\ln$ sind nur Werte > 0 erlaubt)

   Wertebereich: $W_f = \mathbb{R}$

2. Spezielle Werte:
   $f(1) = \ln 1 = 0$ (Nullstelle),
   $f(e) = \ln e = 1$ ($e \approx 2{,}718$ Eulersche Zahl)

3. Rechenregeln ($a, b > 0$, $n \in \mathbb{R}$):

   $$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln(\tfrac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \ln(a^n) = n\ln(a)$$

   Dadurch ergeben sich oft Vereinfachungen, z. B.
   $\ln(\frac{x}{x^2+1}) = \ln x - \ln(x^2+1)$, $\ln(e^2) = 2\ln e = 2$, $\ln(\frac{1}{e}) = \ln 1 - \ln e = -1$

4. Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x \to -\infty$ (d. h. die y-Achse ist Asymptote)

   Die $\ln$-Funktion konvergiert schwächer als jedes Polynom, also
   $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

5. Ableitung: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

6. Steht im $\ln$ nicht einfach x (Beispiel: $g(x) = \ln(1-2x)$), so muss dies berücksichtigt werden

   - beim Definitionsbereich: $g(x) = \ln(1-2x)$ ist definiert, wenn $1 - 2x > 0$ ist, d. h. $x < \frac{1}{2}$, also $D_g =]-\infty; \frac{1}{2}[$
   - beim Differenzieren: $g'(x) = \frac{1}{1-2x} \cdot (-2) = \frac{2}{2x-1}$
     („1 durch das Innere mal das Innere nachdifferenziert“)

7. Stammfunktionen: (siehe Formelsammlung/Merkhilfe)
   $K(x) = \ln|x| + C$ ist Stammfunktion von $k(x) = \frac{1}{x}$
   $K_1(x) = \ln|v(x)| + C$ ist Stammfunktion von $K_1(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$
   $F(x) = x\ln x - x + C$ ist Stammfunktion von $f(x) = \ln x$

8. Term der Umkehrfunktion: e^x

   Somit ist $e^{\ln x} = x$ und $\ln e^x = x$.

9. Lösen von Exponentialgleichungen durch beidseitiges Logarithmieren: Beispiel aus der Stochastik:

   $$\begin{array}{rcll} (\frac{5}{6})^n & < & 0{,}01 & |\ln \quad \text{(und Rechenregeln!)} \\ n\ln\frac{5}{6} & < & \ln 0{,}01 & |:\ln\frac{5}{6} \quad (< 0) \quad (!) \\ n & > & \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{5}{6}} \approx 25{,}3 & \end{array}$$

10. Lösen von Gleichungen vom Typ $\ln(1-2x) = 3$: Beidseitiges Anwenden der e-Funktion liefert $e^{\ln(1-2x)} = e^3$, also $1 - 2x = e^3$, somit $x = \frac{1}{2}(1 - e^3)$

11. Die $\ln$-Funktion ist die Logarithmusfunktion zur Basis e ($\ln x = \log_e x$).

    Für die allgemeine $\log$-Funktion $h_a(x) = \log_a x$, $x > 0$, zur Basis $a > 0$ gilt (Basis-Umwandlung!) $h_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ und daher $h'_a(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$ (siehe Formelsammlung/Merkhilfe).