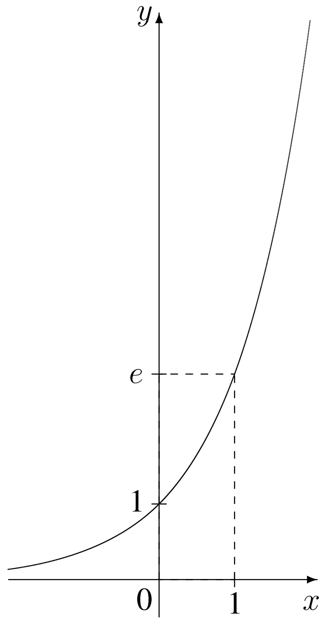
11. Klasse TOP 10 Grundwissen	11
e-Funktion	**07**

$f(x) = e^x$ („Natürliche Exponentialfunktion")



1. Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$ (alle x-Werte sind erlaubt)

   Wertebereich: $W_f =]0; \infty[$
   (es ist $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
   somit besitzt die e-Funktion keine Nullstellen)

2. Spezielle Werte:
   $f(0) = e^0 = 1$ (Schnitt mit der y-Achse),
   $f(1) = e^1 = e \approx 2{,}718$ (Eulersche Zahl e)

   Taschenrechner: Meist SHIFT-ln.
   Beispiel: $e^{0{,}5} \approx 1{,}649$, $e = e^1 \approx 2{,}718$

3. Es gelten die bekannten Potenz-Rechenregeln,
   also z. B. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{2+x} = e^2 \cdot e^x$, $e^{2x} = (e^x)^2$

4. Grenzwerte:

   $\lim\limits_{x\to\infty} e^x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ (d. h. die negative x-Achse ist Asymptote)

   Die e-Funktion konvergiert stärker als jedes Polynom, also
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} \to \infty$

5. Ableitung: $f'(x) = e^x$ („Die e-Funktion reproduziert sich.")

   Somit ist $f'(x) > 0$, d. h. der Graph steigt streng monoton.

6. Ist der Exponent nicht einfach x, so muss beim Differenzieren nachdifferenziert werden. Beispiel:

   $$g(x) = e^{-2x}, \qquad g'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$$

   („e-Funktion reproduziert sich mal das Innere (also $-2x$) nachdifferenziert")

7. Stammfunktion: $F(x) = e^x + C$ ist Stammfunktion von $f(x) = e^x$.

   $F_1(x) = e^{v(x)} + C$ ist Stammfunktion von $f_1(x) = v'(x)e^{v(x)}$.

8. Term der Umkehrfunktion: $\ln x$

   Somit ist $e^{\ln x} = x$ und $\ln e^x = x$.

9. Lösen von Exponentialgleichungen durch beidseitiges Logarithmieren: Beispiel:

   $$\begin{aligned} e^x &= 2 \qquad |\ln \\ x &= \ln 2 \end{aligned}$$

10. Lösen von Gleichungen mit Produkt vom Typ $(3x+4)e^{x-1} = 0$:

    Da $e^{\cdots}$ stets positiv ist, kann man beide Seiten der Gleichung durch $e^{\cdots}$ dividieren (in obigem Beispiel steht dann $3x + 4 = 0$ als leicht zu lösende Gleichung).

11. Für die allgemeine Exponentialfunktion $h_a(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, Basis $a > 0$, gilt $h_a(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$ und daher $h_a'(x) = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x$.

    Somit ist $h_a'(0) = \ln a$ und die Eulersche Zahl $e \approx 2{,}718$ als Basis der natürlichen Exponentialfunktion ist diejenige, bei der $h_e'(0) = 1$ gilt.