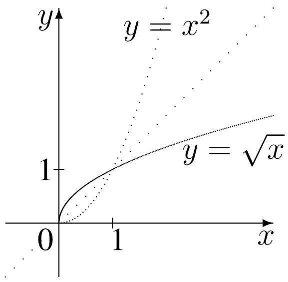
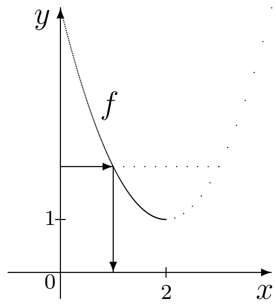
11. Klasse TOP 10 Grundwissen	11
Wurzelfunktion, Umkehrung, Parameter	**05**

Wurzelfunktion



Die Wurzelfunktion f mit $y = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion (siehe unten) zur Quadratfunktion mit $y = x^2$, $x \geq 0$.
Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty[$.
Funktionsgraph: Halbparabel (siehe Skizze).
Schreibweise mit Potenz: $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$, wobei im Nullpunkt eine senkrechte Tangente vorliegt.

Umkehrfunktion



Beispiel: Gesucht ist die Umkehrfunktion zu
$f(x) = x^2 - 4x + 5$, $D_f =]-\infty; 2]$, $W_f = [1; \infty[$
Umkehrung bedeutet, zu jedem y-Wert jetzt umgekehrt den x-Wert zu finden; damit dies eindeutig möglich ist, muss bei der hier vorliegenden quadratischen Funktionsgleichung der Definitionsbereich eingeschränkt werden, z. B. auf den linken Parabelast wie in der Skizze.

Gleichung schreiben: $y = x^2 - 4x + 5$, $x \leq 2$, $y \geq 1$
Variablentausch $x \leftrightarrow y$ (auch bei D_f, W_f): $x = y^2 - 4y + 5$, $y \leq 2$, $x \geq 1$
Nach y auflösen: $y^2 + 4y + 5 - x = 0$; $y_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5 + x} = 2 \pm \sqrt{x - 1}$
Blick auf $D_f = W_{f^{-1}}$ liefert: $y = 2 - \sqrt{x - 1}$, da $y \leq 2$
Also: $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$, $D_{f^{-1}} = W_f$, $W_{f^{-1}} = D_f$
In der Zeichnung ist der Graph an der Winkelhalbierenden des 1./3. Quadranten zu spiegeln (siehe auch Bild oben bei der Wurzelfunktion).

Kurvenscharen: Funktionsterme mit Parameter (→ grund108.pdf)
Beim Differenzieren ist zu unterscheiden zwischen der Variablen x, nach der differenziert wird, und dem Parameter (z. B. a, k, t, …), der die Rolle einer Konstanten spielt, somit wie eine feste Zahl behandelt wird und nach dem nicht differenziert wird.
Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2ax^2 + a^2x - 2a^3 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2a \cdot 2x + a^2 = 3x^2 - 4ax + a^2 \\ f''(x) &= 6x - 4a \end{aligned}$$

Je nachdem, welchen Wert man für den Parameter einsetzt, erhält man verschiedene Funktionen, also eine ganze Schar von Kurven, z. B.
$a = -1$: $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ $a = 0$: $f(x) = x^3$ $a = 1$: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$
Zum Teil können diese Kurven ganz unterschiedlich aussehen, d. h. bei Funktionsuntersuchungen, die man allgemein mit dem Parameter rechnet, sind eventuell Fallunterscheidungen notwendig.
Beispiel: $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x - 2a^3$
Punkte mit waagrechter Tangente: $f'(x) = 0$: $3x^2 - 4ax + a^2 = 0$;
$x_{1/2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4 \cdot 3 \cdot a^2}}{2 \cdot 3} = \frac{4a \pm 2a}{6}$. $x_1 = \frac{1}{3}a$, $x_2 = a$. Ob Max oder Min, hängt von a ab:

$a < 0$ (Zahlenbeispiel rechnen!):
$f' > 0$ | $f' < 0$ | $f' > 0$
steigt a fällt $\frac{1}{3}a$ steigt
Max $(a|-2a^3)$ Min $(\frac{1}{3}a|-\frac{50}{27}a^3)$

$a = 0$:
$f' > 0$ | $f' > 0$
steigt 0 steigt
TerrP $(0|0)$

$a > 0$:
$f' > 0$ | $f' < 0$ | $f' > 0$
steigt $\frac{1}{3}a$ fällt a steigt
Max $(\frac{1}{3}a|-\frac{50}{27}a^3)$ Min $(a|-2a^3)$