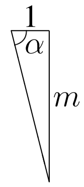
11. Klasse TOP 10 Grundwissen	11
Tangenten, Extrema, Newton-Verfahren	**03**

Tangenten an den Funktionsgraphen von f im Punkte $P(x|y)$:
Zunächst bestimmt man den y-Wert durch Einsetzen von x in $f(x)$.
Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + t$
Die Steigung m erhält man mit der Ableitung an der Stelle x: $m = f'(x)$.
Den y-Achsenabschnitt t erhält man durch Einsetzen der Punktkoordinaten.
Beispiel: $f(x) = x^2 - 8x + 1$, $P(2|?)$.
y-Wert: $f(2) = -11$, also $P(2|-11)$.
Steigung: $f'(x) = 2x - 8$, $f'(2) = -4$. Also Tangente: $y = -4x + t$.
P einsetzen: $-11 = -4 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -3$. Also Tangente: $y = -4x - 3$.

Zum Aufstellen der Tangentengleichung an der Stelle x_0 kann auch direkt die Formel $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ verwendet werden.



Den **Schnittwinkel** α einer Geraden $g(x) = mx + t$ mit der x-Achse und den **Neigungswinkel der Tangente** erhält man mit $m = \tan\alpha$.
Mit der SHIFT-tan- bzw. INV-tan-Funktion des Taschenrechners erhält man dann α.
Beispiel: $g(x) = -4x - 3$. $m = -4 = \tan\alpha \Rightarrow \alpha \approx -75{,}96°$.

Normale: Unter einer Normalen versteht man in der Mathematik eine senkrecht stehende Gerade. Zu einer vorgegebenen Steigung m_1 erhält man die Steigung m_2 der Normalen mit der Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Extrema und Monotonie:
$f'(x)$ bilden, $f'(x) = 0$.
Vorzeichenbereiche von f' ermitteln (→ grund107.pdf, dabei auch eventuelle Definitionslücken markieren).
Monotonie: $f' > 0$: Graph steigt in diesem Bereich streng monoton; $f' < 0$: fällt.
Dazwischen je nach Situation: Definitionslücke, (lokales) Maximum (steigt-fällt), (lokales) Minimum (fällt-steigt), Terrassenpunkt (fällt-fällt oder steigt-steigt).
Die y-Koordinaten dieser Punkte ermittelt man durch Einsetzen in den Original-Funktionsterm f(x) ganz oben.

Beispiel: $f(x) = -x^4 + 2x^3$, $D_f = \mathbb{R}$
$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$
$f'(x) = 0$: $x^2(-4x + 6) = 0$; $x_{1/2} = 0$, $x_3 = 1{,}5$.

$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$
steigt	0	steigt	1,5	fällt
	TerrP(0|0)		Max(1,5|1,6875)	

Eventuell könnten an den Rändern des Definitionsbereichs globale Maxima/Minima auftreten. Wäre hier z. B. $D_f = [-2; 2]$, so wäre $(-2|-32)$ ein globales Minimum.
Eigentlich sollte man beim x-Wert besser Maximal-/Minimalstelle, beim Punkt besser Hochpunkt/Tiefpunkt sagen.

Newton-Verfahren:
Zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen wird folgende Iterations-Idee verwendet:

- Wahl eines geeigneten Startwertes x_0.
- Berechnung der Tangente t im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$:
  $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.
- Berechnung der Nullstelle x_1 der Tangente:
  $t(x) = 0$ liefert $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  In der Regel ist x_1 ein besserer Näherungswert für die gesuchte Nullstelle von f (siehe Abb.).
- Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens mit x_1 usw. als neuem Startwert.