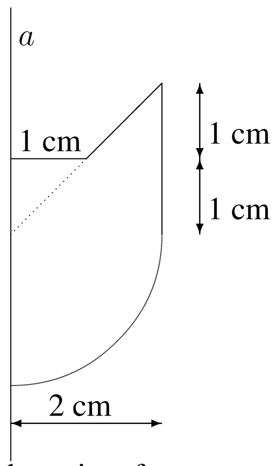
10. Klasse TOP 10 Grundwissen	**10**
Kugel	**09**

Kugel mit Radius r
Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Oberfläche $O = 4\pi r^2$.
Tipp: Bei Berechnungen Einheitenkontrolle: Flächen müssen sich wegen „r^2“ in der Einheit m^2, dm^2, cm^2, … ergeben, Volumina wegen „r^3“ in m^3, dm^3=Liter, cm^3, …

Beispiele:
Das Volumen einer Marmorkugel sei 90 cm^3. Zu berechnen sind Durchmesser und Oberflächeninhalt. Ferner ist anzugeben, wie sich der Oberflächeninhalt ändern würde, wenn das Volumen 64-mal so groß wäre.
Lösung in der Einheit cm (bzw. cm^2 bzw. cm^3):
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, also $\frac{3V}{4\pi} = r^3$, also $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 90}{4\pi}} \approx 2{,}78$, also Durchmesser $d = 2r \approx 5{,}56$ (cm). Oberfläche $O = 4\pi r^2 \approx 4\pi \cdot 2{,}78^2 \approx 97{,}1$ (cm^2).
Bei 64-fachem Volumen $V_{\text{neu}} = 64V$ ist $r_{\text{neu}} = \sqrt[3]{\frac{3V_{\text{neu}}}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 64V}{4\pi}} = \sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 4r$, der Radius also 4-fach, $O_{\text{neu}} = 4\pi r_{\text{neu}}^2 = 4\pi(4r)^2 = 4\pi \cdot 16r^2 = 16O$, die Oberfläche somit 16-fach.

Rotationskörper
Durch Rotation eines Rechtecks um eine Seite entsteht ein Zylinder, durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete ein Kegel, durch Rotation eines Halbkreises um den Durchmesser eine Kugel.

Beispiel:
Zu berechnen ist das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die nebenstehend skizzierte aus Viertelkreis und Strecken zusammengesetzten Figur um die Achse a rotiert.



Der Rotationskörper besteht unten aus einer Halbkugel, zunächst mit aufgesetztem Zylinder der Höhe 1 cm; durch Rotation des Dreiecks entsteht ein Zylinder, aus dem ein Kegelstumpf ausgeschnitten ist.
Für die Berechnung bequemer ist folgende Sichtweise: Unten Halbkugel (HK), darauf ein 2 cm hoher Zylinder, aus dem zunächst ein ganzer Kegel der Höhe 2 cm ausgeschnitten wird. Anschließend wird wieder ein kleiner Kegel der Höhe 1 cm eingesetzt.

$V = V_{\text{HK}} + V_{\text{2 cm-Zyl}} - V_{\text{2 cm-Kegel}} + V_{\text{1 cm-Kegel}}$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r_{\text{HK}}^3 + r_{\text{2 cm-Zyl}}^2 \pi h_{\text{2 cm-Zyl}} - \frac{1}{3} r_{\text{2 cm-Kegel}}^2 \pi h_{\text{2 cm-Kegel}} + \frac{1}{3} r_{\text{1 cm-Kegel}} \pi h_{\text{1 cm-Kegel}}$
$= \frac{2}{3}\pi \cdot (2\text{ cm})^3 + (2\text{ cm})^2\pi \cdot 2\text{ cm} - \frac{1}{3}(2\text{ cm})^2\pi \cdot 2\text{ cm} + \frac{1}{3}(1\text{ cm})^2\pi \cdot 1\text{ cm}$
$= (\frac{16}{3} + 8 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3})\pi\text{ cm}^2 = 11\pi\text{ cm}^2 \approx 34{,}6\text{ cm}^2$