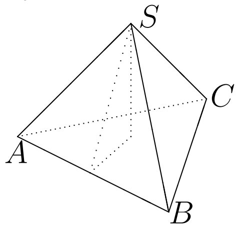
10. Klasse TOP 10 Grundwissen — 10
Pyramide, Kegel — 08

Schrägbild
→ grund810.pdf

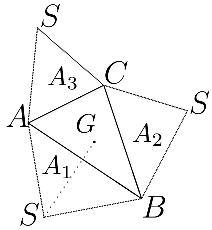
Netz
Aus Platzgründen ist das Netz hier jeweils verkleinert dargestellt.

Pyramide

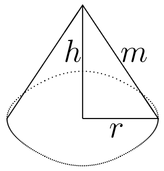


Volumen:
$\frac{1}{3}$Grundfläche · Höhe
$V = \frac{1}{3}Gh$
(Vieleck als Grundfläche G)

Mantelfläche:
$M = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$
(Seitenflächen-Dreiecke)
Oberfläche:
$O = M + G$

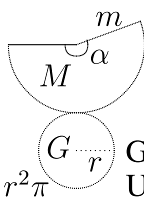


Kegel



Volumen:
$\frac{1}{3}$Grundfläche · Höhe
$V = \frac{1}{3}r^2\pi h$
Mantellinie:
$m = \sqrt{h^2 + r^2}$

Mantelfläche:
$M = \pi r m$
(Sektor $M = \frac{\alpha}{360°}m^2\pi$)
Oberfläche:
$O = M + G = \pi r m + r^2\pi$



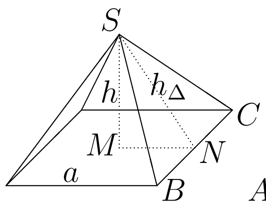
Sektor-Bogenlänge $b = \frac{\alpha}{360°}2m\pi$ gleich Grundkreis-Umfang $2r\pi$

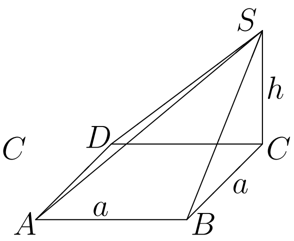
Kegelstumpf
Hierfür gibt es auch „fertige“ Formeln, die man in der Regel nicht auswendig weiß, sondern in der Formelsammlung nachschlägt oder sich selbst herleitet. Hierzu ergänzt man den Kegelstumpf zu einem ganzen Kegel und verwendet zur Berechnung von dessen Höhe den Strahlensatz (siehe auch ueb96.pdf, Aufgabe 6).

Längen- und Winkelberechnungen
Hilfreich sind rechtwinklige Stützdreiecke, deren Maße man oft mit Pythagoras ermitteln kann oder in denen man mit sin, cos, tan arbeiten kann.

Beispiel
Zu vergleichen sind Volumen und Oberfläche folgender Pyramiden:

- Quadrat mit Seitenlänge $a = 4$ als Grundfläche, Höhe $h = 3$, gerade Pyramide (Spitze über dem Quadrat-Mittelpunkt)
- Quadrat mit Seitenlänge $a = 4$ als Grundfläche, Höhe $h = 3$, Spitze der Pyramide über einem Quadrat-Eckpunkt





Die Volumina $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 3 = 16$ sind gleich (dies folgt auch aus dem Satz von Cavalieri, denn in gleicher Höhe geführte Schnitte sind flächengleich).
Gerade Pyramide: Die Höhe h_Δ in einem der vier flächengleichen Seitendreiecke (z. B. ΔBCS) berechnet man mit Pythagoras im Stützdreieck SMN: $h_\Delta^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$, also $h_\Delta = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
$O_{\text{gerade}} = G + 4A_{\Delta BCS} = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ah_\Delta = 4^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{1} = 16 + 8\sqrt{13} \approx 44{,}84$
Schiefe Pyramide: Mantelfläche: ΔBCS und ΔDCS haben gleiche Fläche $A_{\Delta BCS} = \frac{1}{2}ah$ $= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$, ebenso haben ΔABS und ΔSDA gleiche Fläche (mit rechtem Winkel bei B bzw. D: $A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2}a \cdot |\overline{BS}| = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{a^2 + h^2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 10$.
$O_{\text{schief}} = G + 2A_{\Delta BCS} + 2A_{\Delta ABS} = 4^2 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 48$.
Wegen $\frac{O_{\text{schief}}}{O_{\text{gerade}}} \approx \frac{48}{44{,}84} \approx 1{,}07$ ist die Oberfläche der schiefen Pyramide um ca. 7 % größer als die der geraden Pyramide.