10. Klasse TOP 10 Grundwissen — 10
Vorzeichenbereiche — 06

Beispiel: $f(x) = 0{,}5x^4 - x^3 - 4x^2 = 0{,}5x^2(x^2 - 2x - 8)$
Zunächst bestimmt man die Nullstellen ($\rightarrow$ grund105.pdf):
$f(x) = 0$, hier $0{,}5x^4 - x^3 - 4x^2 = 0$ ergibt:
$x_{1/2} = 0$ (doppelt), $x_3 = -2$ (einfach), $x_4 = 4$ (einfach)
Diese zeichnet man auf der x-Achse eines Koordinatensystems ein (falls die Funktion Definitionslücken hat, muss man diese ebenfalls einzeichnen):

-2	0	4	x →

Dadurch ergeben sich im Beispiel vier Bereiche: $]-\infty; -2[$, $]-2; 0[$, $]0; 4[$ und $]4; \infty[$.
Man überlegt sich nun für jeden der Bereiche das Vorzeichen von $f(x)$ in diesem Bereich. Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten:

- „Einsetz-Methode“:[1] Eine Zahl, die im jeweiligen Bereich liegt, wird in $f(x)$ eingesetzt. In unserem Beispiel:

  In $]-\infty; -2[$ liegt z. B. -3; Einsetzen in $f(x)$ liefert:
  $$f(-3) = 0{,}5 \cdot (-3)^4 - (-3)^3 - 4(-3)^2 = 40{,}5 - (-27) - 4 \cdot 9 = 31{,}5 \text{ positiv!}$$
  In $]-2; 0[$ liegt z. B. -1; Einsetzen: $f(-1) = -2{,}5$ negativ!

  Ebenso: In $]0; 4[$: negativ; in $]4; \infty[$ positiv.

- „Linearfaktor-Vorzeichen-Methode“: Man schreibt die Polynome in der Linearfaktorzerlegung („x minus Nullstelle“). Damit schreibt (oder überlegt) man für jeden Bereich, welches Vorzeichen der jeweilige Linearfaktor dort hat. In unserem Beispiel:

  $f(x) = 0{,}5x^2(x+2)(x-4)$. Dabei sind $0{,}5$ und x^2 in jedem der Bereiche positiv; $x+2$ ist negativ für $x < -2$ und positiv für $x > -2$ usw.:

		-2		0		4	
$0{,}5x^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$+$

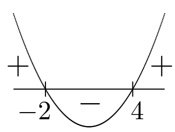
  Nach den üblichen Regeln (z. B. „minus mal minus ist plus“) überlegt man sich nun das Vorzeichen von $f(x) = 0{,}5x^2(x+2)(x-4)$ in jedem Bereich:

		-2		0		4	
$f(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$

  Dabei erkennt man (**Vielfachheit**): Bei einfachen Nullstellen wechselt $f(x)$ das Vorzeichen (Funktionsgraph schneidet die x-Achse), bei geraden Nullstellen (wegen des Quadrats) dagegen liegt kein Vorzeichenwechsel vor (Berührstelle), bei dreifachen Nullstellen würde der Funktionsgraph mit einem Terrassenpunkt gegenüber der x-Achse das Vorzeichen wechseln.

- Mit etwas Erfahrung bestimmt man das Vorzeichen nur in einem Bereich[2] und durch Betrachtung der Vielfachheit der Nullstelle (einfach oder doppelt …, d. h. mit oder ohne Vorzeichenwechsel) die Vorzeichen in den angrenzenden Bereichen.

  In unserem Beispiel kann man ferner auch so argumentieren: $0{,}5x^2$ ist stets positiv. Der verbleibende Faktor $x^2 - 2x - 8$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, ist also zuerst im Positiven, dann im Negativen, dann im Positiven.

[1] Diese Methode ist allerdings mathematisch nicht ganz exakt, da man ja nur einzelne Stellen betrachtet und Beispiele in der Mathematik bekanntlich nicht gelten. Die nachfolgend beschriebene Linearfaktor-Vorzeichen-Methode zeigt jedoch, dass die Vorzeichen nur bei den Nullstellen wechseln können und rechtfertigt damit diese Einsetz-Vorgehensweise.

[2] Durch Betrachtung bequemer Funktionswerte. In unserem Beispiel etwa sieht man für sehr große x das + ($\lim x \to \infty$); bequem ist auch 1 einzusetzen; bei anderen Funktionstermen auch die 0.