10. Klasse TOP 10 Grundwissen 10
Ganzrationale Funktionen 05

Prinzipieller Verlauf (Verhalten für unendlich große x-Werte, $\rightarrow$ Bilder unten)
An der höchsten Potenz und deren Vorzeichen erkennt man:
Bei geradem höchstem Exponenten zur Basis x und zugehörigem positivem Koeffizienten verläuft der Graph „von links oben nach rechts oben“ (z. B. bei $f_1(x) = 0{,}1x^4 - x^2 + 0{,}9$ ist bei Einsetzen „sehr stark negativer“ x-Werte wie $x = -1000$ das positive $x^4 = (-1000)^4$ am stärksten); bei geradem höchstem Exponenten mit negativem Vorzeichen entsprechend gespiegelt „von links unten nach rechts unten“ (z. B. $f_2(x) = -0{,}1x^4 + x^2 - 0{,}9$).
Bei ungeradem höchstem Exponenten und zugehörigem positivem Koeffizienten verläuft der Graph „von links unten nach rechts oben“ (z. B. $f_3(x) = 2x^3 - 3x^2$), bei negativem Vorzeichen entsprechend gespiegelt „von links oben nach rechts unten“ (z. B. $f_4(x) = -2x^3+3x^2$).

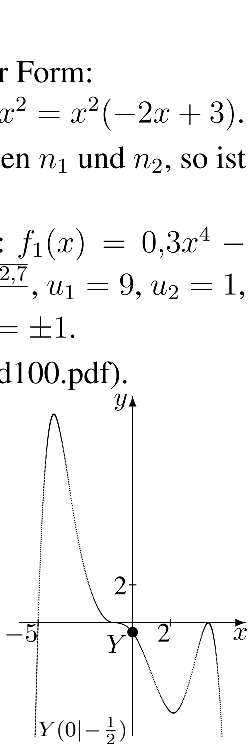
Symmetrie (spezielle): Punktsymmetrie zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse, falls $f(-x) = f(x)$
Beispiele:
$f_1(x) = 0{,}1x^4 - x^2 + 0{,}9$ (nur gerade Exponenten) ist achsensymmetrisch zur y-Achse, denn $f_1(-x) = 0{,}1(-x)^4 - (-x)^2 + 0{,}9 = 0{,}1x^4 - x^2 + 0{,}9 = f_1(x)$.
$f_4(x) = -2x^3 + 3x^2$ (gerade und ungerade Exponenten): Keine spezielle Symmetrie.
$f_5(x) = 0{,}5x^3 - 2x$ (nur ungerade Exponenten) ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn $f_5(-x) = 0{,}5(-x)^3 - 2(-x) = -0{,}5x^3 + 2x = -(0{,}5x^3 - 2x) = -f_5(x)$. $\rightarrow$ Bilder unten

Schnitt mit der y-Achse: Berechnung von $f(0)$.

Nullstellen
Diese erkennt man am besten, wenn der Term in der **faktorisierten Form** gegeben ist, z. B. $f_6(x) = -0{,}1x^3(x-1)(x+2)^2$, denn zum Lösen der Gleichung $f_6(x) = 0$ kann der Satz vom Nullprodukt angewandt werden („Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist“).
Im Beispiel $f_6(x) = -0{,}1x^3(x-1)(x+2)^2 = 0$: $x^3 = 0$ oder $(x-1) = 0$ oder $(x+2)^2 = 0$, also $x_{1/2/3} = 0$ (dreifach), $x_4 = 1$ (einfach), $x_5/6 = -2$ (doppelt).
Vielfachheit und Vorzeichenbereiche $\rightarrow$ grund106.pdf.
Spezialfälle zur Nullstellen-Berechnung, falls Term nicht in faktorisierter Form:

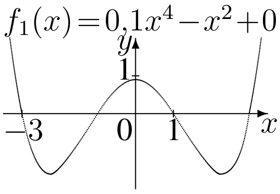
- Falls die Konstante fehlt: x ausklammern, z. B. $f_4(x) = -2x^3 + 3x^2 = x^2(-2x + 3)$.
- Bei quadratischen Termen: Liefert die Lösungsformel die Nullstellen n_1 und n_2, so ist $ax^2 + bx + c = a(x - n_1)(x - n_2)$.
- Bei biquadratischen Gleichungen: Substitution $u = x^2$. Beispiel: $f_1(x) = 0{,}3x^4 - 3x^2 + 2{,}7 = 0$ liefert $0{,}3u^2 - 3u + 2{,}7 = 0$, also $u_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 0{,}3\cdot 2{,}7}}{2\cdot 0{,}3}$, $u_1 = 9$, $u_2 = 1$, Rücksubstitution ergibt $x^2 = 9$ oder $x^2 = 1$, also $x_{1/2} = \pm 3$, $x_{3/4} = \pm 1$.
- Im allgemeinen Fall: Polynomdivision (nicht im Lehrplan $\rightarrow$ grund100.pdf).

Umgekehrt gelingt es mit der Faktorzerlegung, Funktionsterme zu Polynomen mit vorgegebenen Nullstellen zu finden. Ist z. B. der nebenstehende Graph mit den Nullstellen -5, -1 und 4 gegeben, so kann ein Funktionsterm der Bauart $f(x) = a(x+5)(x+1)^3(x-4)^2$ vermutet werden; durch Einsetzen des Punktes $(0|-0{,}5)$ findet man dann $a = -\frac{1}{160}$, also $f(x) = -\frac{1}{160}(x+5)(x+1)^3(x+4)^2$.

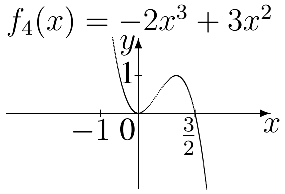


Beispiele von Funktionsgraphen

$f_1(x) = 0{,}1x^4 - x^2 + 0{,}9$



$f_4(x) = -2x^3 + 3x^2$



$f_5(x) = 0{,}5x^3 - 2x$