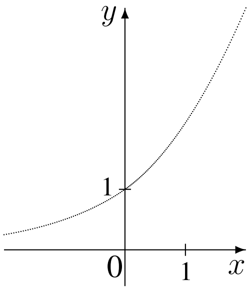
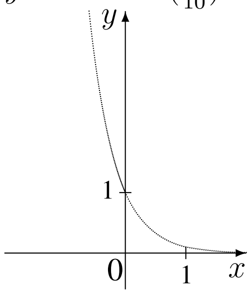
# 10. Klasse TOP 10 Grundwissen	10
Exponentialfunktion und Logarithmus	**01**

Exponentialfunktionen $f(x) = a \cdot b^x$ mit Anfangswert $a > 0$ und Wachstumsfaktor $b > 0$.

$y = 2^x$



$y = 10^{-x} = (\frac{1}{10})^x$



Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
Wertebereich: $W = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$
Im Fall $b > 1$ steigt die Kurve streng monoton (und zwar bei genügend großen x-Werten beliebig steil; steiler als bei linearem oder quadr. Wachstum); für $x \to -\infty$ nähert sie sich der x-Achse (Asymptote).
Für $x = 0$ erhält man $f(0) = a \cdot b^0 = a \cdot 1 = a$.

Anwendungsbeispiele:

- Zins und Zinseszins: Ein Guthaben K steigt jedes Jahr um 5 %, d. h. mit Faktor 1,05. Nach x Jahren liegt dann das Guthaben $K \cdot 1{,}05^x$ vor (exponentiell steigend).
- Radioaktiver Zerfall: Der Vorrat an noch nicht zerfallenen Atomkernen nimmt in einer gewissen Zeit jeweils auf die Hälfte ab. Nach x solchen Zeitabschnitten liegt dann nur noch $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ von der Anfangsmenge vor (exponentiell fallend).
- Bei exponentieller Zunahme ist bei einem Zeitschritt der Faktor gleich, also $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$ konstant, bei linearem Wachstum ist die Zunahme gleich, also $f(x+1) - f(x) = m$ konstant. So ergeben sich z. B. aus 100 Euro bei linearer Zunahme um jährlich $m = 20$ Euro nach 1 bzw. 2 bzw. 25 Jahren dann 120 bzw. 140 Euro bzw. $100 + 25 \cdot 20$ Euro $= 600$ Euro, dagegen bei exponentieller Zunahme um 20 % sogar $f(1) = 120$ bzw. $f(2) = 144$ Euro bzw. $100 \cdot 1{,}20^{25}$ Euro ≈ 9540 Euro. Hier ist z. B. $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{f(1)}{f(0)} = 1{,}20$.

Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$ zur Basis $b > 0$
sind Umkehrfunktionen der Exponentialfunktion, und zwar ist der Logarithmus zur Basis b die Umkehrung zur Exponentialfunktion mit Basis b.
Somit $\log_b b^x = x$ und $b^{\log_b x} = x$ sowie $\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$.

$$x \underset{\log_b \ldots}{\overset{b^{\cdots}}{\rightleftarrows}} b^x$$

Beispiel: $\log_3(81) = 4$, weil $3^4 = 81$, und $\log_3(-81)$ ist nicht definiert, weil es keine Zahl x gibt mit $3^x = -81$. Somit Definitionsbereich $D_{\log_b} = \mathbb{R}^+ =]0; \infty[$
Am Taschenrechner (TR) steht oft mit der $\log_{\blacksquare}$-Taste die allgemeine Logarithmusfunktion zur Verfügung, ferner mit der log-Taste der Logarithmus zur Basis 10, also die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit der Gleichung $y = 10^x$. Falls es keine allgemeine Logarithmusfunktion am TR gibt, muss man die Basiswechsel-Formel $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$ verwenden.

Rechenregeln: $\log(ab) = \log a + \log b$ $\quad \log(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$ $\quad \log(a^r) = r \log a$

Exponentialgleichungen
sind Gleichungen, in denen die Lösungsvariable x im Exponenten auftritt. Exponentialgleichungen löst man durch beidseitiges logarithmieren.

Beispiel: Die Weltbevölkerung betrug 1990 ca. 5264 Millionen, 2006 ca. 6538 Millionen. Modelliert man dies als exponentielles Wachstum mit Anfangswert $b = 5264 \cdot 10^6$, also $f(x) = b \cdot a^x$, so ist (16 Jahre später) $f(16) = 6538 \cdot 10^6 = 5264 \cdot 10^6 \cdot a^{16}$, also $a = \sqrt[16]{\frac{6538}{5264}} \approx 1{,}24^{\frac{1}{16}} \approx 1{,}0136$, d. h. das jähliche Wachstum beträgt ca. 1,36 %.
Danach Bevölkerungszahl im Jahr 2050: $f(60) = 5264 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0136^{60} \approx 12 \cdot 10^9$.
Wann wird sich bei diesem Modell die Bevölkerungszahl im Vergleich zum Jahr 1990 verdoppelt haben? Antwort: Gesucht ist x mit $f(x) = 2 \cdot 5264 \cdot 10^6$, also die Lösung der Exponentialgleichung $2 = 1{,}0136^x$. Anwendung von $\log$ auf beiden Seiten: $\log 2 = \log 1{,}0136^x$; gemäß Rechenregel folgt $\log 2 = x \cdot \log 1{,}0136$, also $x = \frac{\log 2}{\log 1{,}0136} \approx 51$, also im Jahre 2041.