11. Klasse Übungsaufgaben (alter LP) — 11
Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit — 09

1. Die folgenden drei Kolmogorow-Axiome sind für Wahrscheinlichkeiten fundamental:
   (1) $P(\Omega) = 1$,
   (2) $P(E) \geq 0$ für alle Ereignisse E,
   (3) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ für alle Ereignisse E_1, E_2 mit $E_1 \cap E_2 = \{\}$.

   Folgern Sie nur aus (1)–(3) die Rechenregel $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Bei einer Verkehrskontrolle wird ein Fahrrad zufällig herausgegriffen und auf Funktionsfähigkeit von Vorder- bzw. Rücklicht untersucht. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwar das Vorder-, aber nicht das Rücklicht funktioniert, betrage $0{,}057$. Die Wahrscheinlichkeit, ein Fahrrad mit defektem Rücklicht herauszugreifen, sei $0{,}06$.

   (a) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der beiden Lichter defekt ist, sei $0{,}09$. Zeigen Sie, dass dann in Hinblick auf die Funktionsfähigkeit Vorder- und Rücklicht nicht unabhängig sind.

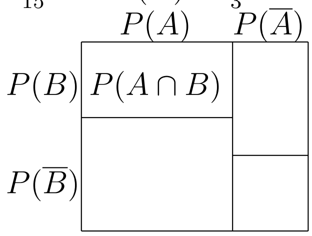
   (b) Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen der beiden Defekte sein müsste, damit sich Unabhängigkeit ergibt.

3. Es werden die Essenswünsche der Besucher einer Kantine betrachtet, in der unter anderem Currywurst angeboten wird. Sei E_i: „Spätestens der i-te Besucher wünscht Currywurst“. Es sei $P(E_i) = 1 - 0{,}6^i$.

   Formulieren Sie $\overline{E_3}$ und $\overline{E_3} \cap E_4$ in Worten; berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

4. Für zwei Ereignisse A und B gelte $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$ und $P(B) = \frac{1}{3}$.
   Berechnen Sie $P(A \cup B)$.

   Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten in einem Diagramm der nebenstehenden Art dar, in dem die Wahrscheinlichkeiten durch entsprechend große Flächeninhalte wiedergegeben sind. Woran erkennt man, ob Unabhängigkeit vorliegt?



5. (Aus dem Abitur 1988)

   Zu jedem Ziffernschloss gehört eine „Geheimzahl“, mit der das Schloss geöffnet werden kann. Im Folgenden werden als Geheimzahlen vierstellige Zahlen verwendet, die aus den Ziffern 1 bis einschließlich 7 gebildet werden können. Dabei wird die Produktion so gesteuert, dass alle möglichen Geheimzahlen gleichwahrscheinlich sind.

   Betrachtet werden die Ereignisse

   Z: „Die Geheimzahl enthält genau zwei gleiche Ziffern“ und

   U: „Die Geheimzahl besteht nur aus ungeraden Ziffern“

   (a) Berechnen Sie $P(Z)$.

   (b) Sind die Ereignisse Z und U unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Element aus U, wenn man nur aus den Elementen von Z zufällig auswählt?