11. Klasse Übungsaufgaben (alter LP) 11
Koordinatengeometrie: Vektoren 04

1. Gegeben ist die Pyramide $ABCS$ durch die Punkte $A(5|0|0)$, $B(3|4|1)$, $C(1{,}5|-2|2{,}5)$ und $S(3|2|5)$, die von den Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AS}$ aufgespannt wird. M sei der Mittelpunkt von $[AB]$, der Punkt T teile die Strecke $[CB]$ im Verhältnis $2:1$, d. h. es ist $\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

   (a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte M und T.

   (b) Stellen Sie die Situation in einem Koordinatensystem zeichnerisch dar.

   (c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS$ und der Pyramide $MBTS$.

   (d) Drücken Sie den Vektor $\overrightarrow{TS}$ durch $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ aus (d. h. in Form einer sog. Linearkombination $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w}$). Tipp: $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA} + \ldots$

2. Gegeben ist das Dreieck ABD mit $A(-1|-1|1)$, $B(2|-2|1)$ und $D(2{,}5|-0{,}5|1)$.

   (a) Berechnen Sie die Längen der drei Seiten und die drei Innenwinkel.

   (b) Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes C, so dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

   (c) Berechnen Sie das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$. Welche Bedeutung hat dieses Vektorprodukt? Warum war die besondere Lage dieses Vektors bereits aus den gegebenen Koordinaten ersichtlich?

   (d) Das Dreieck ABD wird nun in die x_1x_2-Grundebene projiziert und somit jetzt das Dreieck $A'B'D'$ mit $A'(-1|-1)$, $B'(2|-2)$, $D'(2{,}5|-0{,}5)$ betrachtet.

   Welche besondere Rolle spielt für dieses Dreieck der Kreis mit der Gleichung $(x_1 - 0{,}75)^2 + (x_2 + 0{,}75)^2 = \frac{25}{8}$?

3. Geben Sie die Gleichung der Kugel um $M(3|-5|0)$ mit Radius 6 an, und prüfen Sie, ob der Ursprung $O(0|0|0)$ innerhalb, auf oder außerhalb der Kugel liegt.

4. Berechnen Sie den Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.