11. Klasse Übungsaufgaben	11
Tangenten, Extrema, Newton-Verfahren	**03**

1. Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 8x - 48$.

   Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $P(1|?)$.

   Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen der Kurve im Punkt $Q(-1|?)$.

2. Prüfen Sie, ob die Gerade mit $g(x) = \frac{15}{4}x + \frac{35}{4}$ eine Tangente an $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ist!

3. Gegeben sind $f(x) = x^2 + 2x + 2$ und $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

   Bestimmen Sie den Winkel, unter dem sich die Funktionsgraphen schneiden; berechnen Sie hierzu die Steigungen m_1 und m_2 im Schnittpunkt und verwenden Sie anschließend $m_1 = \tan\alpha_1$, $m_2 = \tan\alpha_2$, um den Schnittwinkel der Tangenten zu ermitteln (Skizze!).

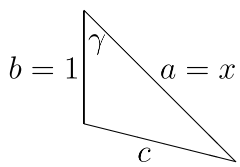
4. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Nullstellen, Monotonie und Extrema. Dabei bemerken Sie: Bei einer doppelten Nullstelle (also ohne Vorzeichenwechsel) hat man eine Berührung der x-Achse und somit gleich eine Kontrolle für den nächsten Schritt, da hier dann ein Extremum vorliegen muss. Unter welchem Winkel schneidet in den anderen Nullstellen der Graph die x-Achse?

   (a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$

   (b) $f(x) = x^4 - 9x^2$

5. Ermitteln Sie mit dem Newton-Verfahren für $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$ mit Startwert $x_0 = 5$ einen Näherungswert für eine Nullstelle. Führen Sie zwei Iterationsschritte durch.

6. In jedem Dreieck gilt der cos-Satz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
   Wendet man diesen Satz auf ein Dreieck mit $\gamma = 45°$, $b = 1$ und variabler Seite $a = x$ an, so erhält man wegen $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   $c = \sqrt{x^2 + 1^2 - 2x \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$.
   Die Seite c ist also dann besonders lang, wenn x sehr groß ist, denn dieser Wurzel-Term ist umso größer/kleiner, je größer/kleiner der Radikand ist.

   Um herauszufinden, wie lang die Seite c mindestens ist, genügt es also, ein Minimum von $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ zu finden.

   Finden Sie den Scheitel von f durch Differenzieren und zeigen Sie auf diese Weise, dass für das Dreieck in diesem Extremalfall $c = a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt; das Dreieck ist dann somit ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck („halbes Quadrat“).