10. Klasse Übungsaufgaben	10
Eigenschaften von Funktionsgraphen	**09**

1. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:
   (a) $f(x) = x^5 - 4x^4$
   (b) $f(x) = -x^6 + 3x$
   (c) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{-2x+1}$
   (d) $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2-2x+1}$
   (e) $f(x) = -3 \cdot 0{,}1^x$ (Tipp für $x \to -\infty$: Siehe Teilaufgabe (h))
   (f) $f(x) = 10^x + 0{,}3$
   (g) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} - 5$
   (h) In den meisten der vorhin beschriebenen Aufgaben kann auch mit Hilfe des Taschenrechners durch Einsetzen einer sehr großen Zahl (z. B. 1 000 000) eine Vorstellung vom Grenzwert für $x \to \infty$ gewonnen werden. Betrachten Sie nun jedoch folgendes Beispiel, bei dem Vorsicht geboten ist:
   $f(x) = x^2 - 10^{-10} \cdot x^3$

2. Untersuchen Sie auf Achsensymmetrie (A) zur y-Achse bzw. Punktsymmetrie (P) zum Nullpunkt (Ursprung) des Koordinatensystems:
   (a) $f(x) = x^{11} - x^5 + 2x$
   (b) $f(x) = x^6 - 9x^4$
   (c) $f(x) = \frac{x^4+1}{x(x^3-3x)}$
   (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2-3x)}$
   (e) Untersuchen Sie Teilaufgabe (b) bis (d) zusätzlich auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

   Für die sin- und cos-Funktion gelten: $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$.
   Welche Symmetrieeigenschaft haben demnach
   (f) die sin- und cos-Funktion,
   (g) die durch $f(x) = (\sin x \cdot \cos x)^3$ gegebene Funktion?

3. Berechnen Sie für $f(x) = \frac{2x+4}{x-3},\ D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, Nullstelle und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

   Begründen Sie durch Einsetzen von x-Werten wie 2,99 oder 3,01, welches Verhalten der Funktionsgraph in der Nähe der Definitionslücke zeigt.

   Fertigen Sie eine Skizze des Funktionsgraphen.

   Entnehmen Sie der Skizze, zu welchem Punkt $Z(a|b)$ der Graph punktsymmetrisch ist.

   Verschieben Sie die Funktion um a nach links und um b nach unten und beweisen Sie für die verschobene Funktion die Punktsymmetrie zum Ursprung.

4. Gegeben sind die durch $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2)$ und $h(x) = \frac{1}{x^2}$ definierten Funktionen.
   (a) Berechnen Sie für f die Nullstellen.
   (b) Welche Bedeutung für den Graphen von f hat die Tatsache, dass sich die Gleichung $\frac{1}{8}(x^3-6x^2) = -4$ umformen lässt in $x^3-6x^2+32 = (x+2)(x-4)^2 = 0$?
   (c) Skizzieren Sie die Graphen von f und h in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   Beschreiben Sie Steigen und Fallen der Graphen.
   Beantworten Sie nun die Frage, wie viele Lösungen die Gleichung $\frac{1}{8}(x^3-6x^2) = \frac{1}{x^2}$ hat.