



<b>10. Klasse Übungsaufgaben</b>	<b>10</b>
<b>Eigenschaften von Funktionsgraphen</b>	<b>09</b>

1. Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

(a)  $f(x) = x^5 - 4x^4$

(b)  $f(x) = -x^6 + 3x$

(c)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{-2x + 1}$

(d)  $f(x) = \frac{-2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

(e)  $f(x) = -3 \cdot 0,1^x$  (Tipp für  $x \rightarrow -\infty$ : Siehe Teilaufgabe (h))

(f)  $f(x) = 10^x + 0,3$

(g)  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} - 5$

(h) In den meisten der vorhin beschriebenen Aufgaben kann auch mit Hilfe des Taschenrechners durch Einsetzen einer sehr großen Zahl (z. B. 1 000 000) eine Vorstellung vom Grenzwert für  $x \rightarrow \infty$  gewonnen werden. Betrachten Sie nun jedoch folgendes Beispiel, bei dem Vorsicht geboten ist:

$$f(x) = x^2 - 10^{-10} \cdot x^3$$

2. Untersuchen Sie auf Achsensymmetrie (A) zur  $y$ -Achse bzw. Punktsymmetrie (P) zum Nullpunkt (Ursprung) des Koordinatensystems:

(a)  $f(x) = x^{11} - x^5 + 2x$

(b)  $f(x) = x^6 - 9x^4$

(c)  $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x(x^3 - 3x)}$

(d)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 3x)}$

(e) Untersuchen Sie Teilaufgabe (b) bis (d) zusätzlich auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Für die sin- und cos-Funktion gelten:  $\sin(-x) = -\sin(x)$  und  $\cos(-x) = \cos(x)$ . Welche Symmetrieeigenschaft haben demnach

(f) die sin- und cos-Funktion,

(g) die durch  $f(x) = (\sin x \cdot \cos x)^3$  gegebene Funktion?

3. Berechnen Sie für  $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ , Nullstelle und  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ .

Begründen Sie durch Einsetzen von  $x$ -Werten wie 2,99 oder 3,01, welches Verhalten der Funktionsgraph in der Nähe der Definitionslücke zeigt.

Fertigen Sie eine Skizze des Funktionsgraphen.

Entnehmen Sie der Skizze, zu welchem Punkt  $Z(a|b)$  der Graph punktsymmetrisch ist.

Verschieben Sie die Funktion um  $a$  nach links und um  $b$  nach unten und beweisen Sie für die verschobene Funktion die Punktsymmetrie zum Ursprung.

4. Gegeben sind die durch  $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2)$  und  $h(x) = \frac{1}{x^2}$  definierten Funktionen.

(a) Berechnen Sie für  $f$  die Nullstellen.

(b) Welche Bedeutung für den Graphen von  $f$  hat die Tatsache, dass sich die Gleichung  $\frac{1}{8}(x^3 - 6x^2) = -4$  umformen lässt in  $x^3 - 6x^2 + 32 = (x+2)(x-4)^2 = 0$ ?

(c) Skizzieren Sie die Graphen von  $f$  und  $h$  in ein gemeinsames Koordinatensystem. Beschreiben Sie Steigen und Fallen der Graphen.

Beantworten Sie nun die Frage, wie viele Lösungen die Gleichung  $\frac{1}{8}(x^3 - 6x^2) = \frac{1}{x^2}$  hat.